Quadratwurzel nach Heron

Die Aufgabe der Flächenverdopplung eines Quadrats wurde in der Antike vollständig gelöst. Die geometrische Lösung besteht darin, das Quadrat über der Diagonalen des Ausgangsquadrats zu errichten.

Hat das Ausgangsquadrat die Seitenlänge 1, dann hat das verdoppelte Quadrat die Seitenlänge derjenigen Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

Die Quadratwurzel aus 2 kann nicht mit Brüchen ganzer Zahlen dargestellt werden; dies wurde schon in der Antike mit indirektem Beweis gezeigt. Trotz dieser Unmöglichkeit liefern Brüche Näherungswerte zu einer berechenbaren Genauigkeit.

Heron (ca. 20 - 62) hat in Alexandria ein schnelles Verfahren zur Näherungslösung einer Quadratwurzel aus einer beliebigen Zahl bekannt gemacht.

Es wird dazu die Division mit einer gemischten Zahl und die Berechnung des arithmetischen Mittels zweier Zahlen benötigt.

arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel $(a + b)/2$ zweier gemischter Zahlen mit Stammbrüchen wird berechnet, indem man die ganzen Zahlen addiert und die Summe halbiert. Kommt der gleiche Stammbruch in beiden Zahlen vor, wird er in das Ergebnis übernommen, ist er nur einmal vorhanden, wird der Nenner verdoppelt.

Das arithmetische Mittel aus II und II /II ist II /IV,
das aus X /II /IV und II /II ist VI /II /VIII.

Zur Berechnung der Quadratwurzel aus der positiven Zahl k wird das gesuchte Ergebnis durch euklidische Intervallschachtelung der Intervalle $[a_n, b_n]$ eingegrenzt.

Man beginnt mit den Näherungswerten a_0, und b_0, $a_0^2 < k$, $b_0^2 > k$, und dem Intervall $[a_0, b_0]$.
Das Verfahren ist selbstkorrigierend.

Es ist dann für $n > 1$ zu berechnen:
$a_{n+1} = k/b_n$ damit ist $1 : a_{n+1} = b_n : k$ (vier Zahlen in Proportion),
$b_{n+1} = (b_n + a_{n+1})/2$ (arithmetisches Mittel, $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/2$).

Quadratwurzel aus II:

	a_{n+1} = II : b_n	$b_{n+1} = (b_n + a_{n+1})$: II	
	a_0 = I	b_0 = I /II	(erste Näherungswerte von unten und von oben)
n	a_n	b_n	
1	I /III	I /III /XII	
2	I /III /XVII /LI	I /III /XIII /CDVIII /DCLXIII	

Bricht man also nach 2 Iterationen ab, ist hier der letzte Wert bereits auf 10^{-5} genau.
Die beiden letzten Glieder der Stammbruchreihe sind jedoch noch nicht sicher. Das Ergebnis würde durch Weiterrechnen auf I /III /XIII /CCLIII verbessert.

Bei der Bestimmung von Näherungswerten für irrationale Zahlen nimmt in der Stammbruchreihe der jeweils nächstfolgende Stammbruch die Größenordnung des Quadrats des vorher letzten Glieds der Stammbruchreihe an, was die Abschätzung des Abbruchfehlers erlaubt.