Würfelverdopplung

Die Aufgabe, das Volumen eines Würfels zu verdoppeln und die dafür erforderliche neue Kantenlänge für den verdoppelten Würfel zu finden, hat zu vielen Anregungen geführt.

Hippokrates aus Chios (ca. -470 bis -410) erkannte, dass die Lösung gefunden wird, indem man das richtige mittlere Verhältnis für das ursprüngliche Volumen a und das doppelte Volumen $2a$ sucht:
$a : x = x : y = y : 2a$.
Aus $a : x = x : y$ erhält man $a \cdot y = x \cdot x$.
Ist $a = 1$ der Ausgangswert, dann ist $y = x \cdot x$ und $1 : x = x : (x \cdot x) = (x \cdot x) : 2$
Damit ist $x \cdot x \cdot x = 2$
und x ist demzufolge diejenige Zahl, die dreimal als Faktor genommen 2 ergibt; diese Zahl ist durch Brüche aus ganzen Zahlen nicht darstellbar.

Die Berechnung der Näherungswerte der Kubikwurzel aus k erfolgt ähnlich wie die der Quadratwurzel nach Heron mit einer entsprechenden euklidischen Intervallschachtelung.

Man beginnt für $k > 1$ mit den Näherungswerten a_0 und b_0, so dass $a_0^3 < k$ und $b_0^3 > k$, und dem Intervall $[a_0, b_0]$. Das Verfahren ist selbstkorrigierend.

Es sind dann zu berechnen:
$a_{n+1} = k/b_n^2$, wobei $1 : a_{n+1} = b_n^2 : k$ (Ergänzung der Proportion) und
$b_{n+1} = (2\, b_n + a_{n+1})/3$ (arithmetisches Drittel, $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/3$).

Kubikwurzel aus II:

	$a_{n+1} = II : b_n^2$	$b_{n+1} = (II \cdot b_n + a_{n+1}) : III$
	$a_0 = I$	$b_0 = I\,/III$ (erste Näherungswerte)
n	a_n	b_n
1	I /VIII	I /IV /LXXII
2	I /IV /CDXCIV	I /IV /CI

Obwohl in der 2ten Zeile gerundet wurde, ist der letzte Wert auf 10^{-5} genau.

Ein Würfel mit der Kantenlänge .I /IV /CI. hat den Rauminhalt .II. mit der angegebenen Genauigkeit.

Beliebige Wurzeln

Die m-te Wurzel aus $k > 1$ wird durch euklidische Schachtelung der Intervalle $[a_n, b_n]$, mit $a_0 = 1$ und b_0, so dass $b_0^m > k$ und $a_1 > 1$, eingegrenzt:

$a_{n+1} = k/b_n^{m-1}$, wobei $1 : a_{n+1} = b_n^{m-1} : k$ (Ergänzung der Proportion),

$b_{n+1} = ((m-1) \cdot b_n + a_{n+1})/m$ (arithmetisches m-Teil: $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/m$).