Rechtwinklige Dreiecke

Heron von Alexandria hat in seinem Werk „Geometrica“ (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, Vol. IV, Stuttgart 1976, S. 221) eine Methode Platons angegeben, um rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu konstruieren:

Gehe von einer geraden Zahl (größer 2) aus.	$2n + 2$
Es sei für die Kathete die Zahl 8 gegeben.	
Nimm die Hälfte: 4.	$n + 1$
Bilde das Quadrat: 4 * 4 = 16.	$(n + 1)^2$
Nimm 1 weg: 16 - 1 = 15. So viel die Grundlinie.	$(n + 1)^2 - 1$
Grundlinie +2 ergibt 17, dies wird die Hypotenuse sein.	$(n + 1)^2 +1$

In diesem Zahlenbeispiel wird das Tripel [8, 15, 17] gefunden.

Der letzten Zeile der Verfahrensvorschrift ist zu entnehmen, dass damit Tripel gefunden werden, bei denen Kathete und Hypotenuse die Differenz 2 aufweisen. Offensichtlich sind mit der überlieferten Anleitung unbegrenzt viele sogenannte pythagoräische Tripel auffindbar.

Allgemein erhält man bei	$a = 2n +2$
für die andere Kathete	$b = (n + 1)^2 -1$
und für die Hypotenuse	$c = (n + 1)^2 +1 = b + 2.$

Es gibt allerdings, was Heron nicht überliefert hat, zu jeder ganzzahligen Differenz zwischen einer der Katheten und der Hypotenuse unbegrenzt viele ganzzahlige Tripel, wenn auch nicht stets in kleinsten Zahlen, also solche, die nicht Vielfache eines anderen sind.

Ist die Differenz $d = c – b$ von Kathete b und Hypotenuse c, dann ist für alle natürlichen Zahlen n :

$d = 1$:	$a = 2n +1$,	$c = (a^2 +1)/2$,
$d = 2$:	$a = 2n +2$,	$c = (a^2 +2^2)/4 = (n + 1)^2 +1$,
$d = 3$:	$a = 6n +3$;	$c = (a^2 +3^2)/6$,
$d = 4$:	$a = 4n +4$,	$c = (a^2 +4^2)/8$,
$d = 5$:	$a = 10n +5$,	$c = (a^2 +5^2)/10$,
$d = 6$:	$a = 6n +6$,	$c = (a^2 +6^2)/12$,
$d = 7$:	$a = 14n +7$,	$c = (a^2 +7^2)/14$,
$d = 8$:	$a = 4n +8$,	$c = (a^2 +8^2)/16$,
$d = 9$:	$a = 6n +9$,	$c = (a^2 +9^2)/18$,
$d = 10$:	$a = 10n +10$,	$c = (a^2 +10^2)/20$,
$d = 11$:	$a = 22n +11$,	$c = (a^2 +11^2)/22$,
$d = 12$:	$a = 12n +12$,	$c = (a^2 +12^2)/24$,

und so weiter.

Stets ist dabei $a = t \cdot n + d$.
Ist $2d$ eine Quadratzahl oder Vielfache einer Quadratzahl q^2, dann ist $t = 2d/q$, sonst $2d$.
Es ist dann $c = (a^2 + d^2)/2d$ die Größe der Hypotenuse und $b = c - d$ die der anderen Kathete im rechtwinkligen Dreieck.

In der beigefügten Tabelle werden ganzzahlige Dreieckszahlen in der Anordnung [a, c, b] aufgelistet mit Hervorhebung der Tripel in kleinsten Zahlen.

Die Hypotenuse rechtwinkliger Dreiecke in Tripel kleinster Zahlen ist $c \equiv 1 \bmod 4$.