Die Quadratur des Kreises

Die Aufgabe der Quadratur des Kreises besteht darin, zu einem gegebenen Kreis mit bekanntem Radius r die Seitenlänge a eines Quadrats anzugeben, das den gleichen Flächeninhalt hat.

Allgemein bekannt geworden ist diese Aufgabe damit, dass sie geometrisch nur mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist.

Mit Euklid (ca. -323 bis -283) gilt für zwei Kreise mit Radien r_1 und r_2 und Flächen A_1 und A_2

$r_1^2 : r_2^2 = A_1 : A_2$

und für ihre Durchmesser d_1 und d_2 und ihre Umfänge U_1 und U_2: $d_1 : d_2 = U_1 : U_2$

mit dem Proportionalitätsfaktor, der seit Leonhard Euler (1707 bis 1783) mit π bezeichnet wird.

Auch π kann nicht mit Brüchen ganzer Zahlen dargestellt werden. Die Berechnung von Näherungswerten mit Brüchen, Stammbrüchen oder Dezimalbrüchen, führt deshalb zu beliebig lange fortsetzbaren Reihen, wenn die zu erzielende Genauigkeit nicht angegeben wird.

Brauchbare Näherungswerte für π wurden mit der Berechnung des Umfangs von regelmäßigen Vielecken erzielt, die einem Kreis mit Durchmesser 1 eingeschrieben sind.

Hat ein regelmäßiges Sechseck einen Umkreis mit Durchmesser 1, so bestehen seine 6 Sektoren, wegen ihrer Innenwinkel von 60°, aus gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1/2.
Der Umfang dieses Sechsecks ist deshalb $6 \cdot 1/2 = 3$, was einen ersten Näherungswert 3 liefert.

Zieht man in den Sektoren des $3 \cdot 2^n$-Ecks die Mittelsenkrechten zur Kante um ein regelmäßiges $3 \cdot 2^{n+1}$-Eck zu konstruieren, ist die Höhe des Sektoren-Dreiecks auf der äußeren Seite, der Kante a_n, für natürliche Zahlen n, mit dem Satz vom rechtwinkligen Dreieck (Stoicheia I.47):

$$h_n = \sqrt{1/4 - 1/4\, a_n^2}$$

und die Kantenlänge a_{2n} des regelmäßigen $3 \cdot 2^{n+1}$-Ecks :

$$a_{2n} = \sqrt{1/2 - h_n} = \sqrt{1/2 - 1/2 \sqrt{1 - a_n^2}}$$

Damit ist der Umfang U_m regelmäßiger $3 \cdot 2^n$-Ecke, für $m = 3 \cdot 2^n$, mit Umkreisdurchmesser 1:

$$U_{12} = 3 \cdot 2^2 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$U_{24} = 3 \cdot 2^3 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$U_{48} = 3 \cdot 2^4 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

. . .

Von Archimedes (ca. -285 bis -212) ist überliefert, dass er zur Bestimmung eines verbesserten Näherungswertes für die Kreiszahl ein 96-Eck berechnet habe.

Zieht man mit Heron die Quadratwurzel aus dem Näherungswert

π = III /VIII /LXI

erhält man den Näherungswert

$\sqrt{\pi}$ = I /II /IV /XLV

als Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1.