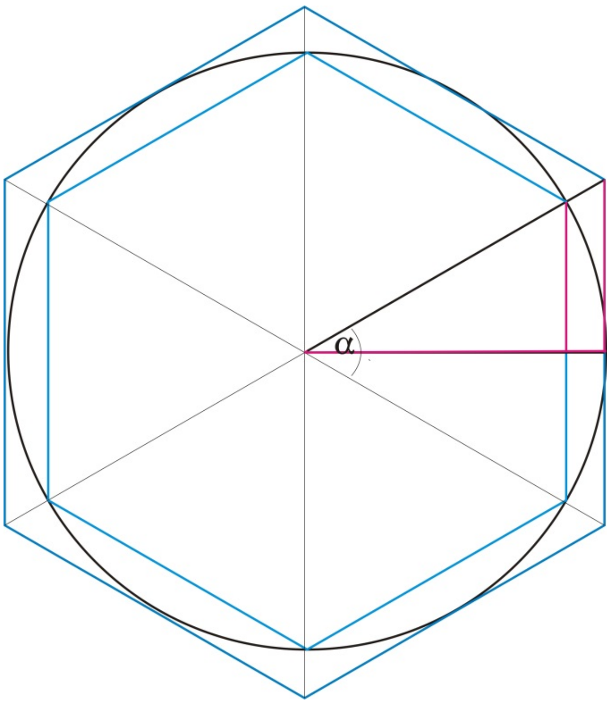
Charakteristische trigonometrische Werte

Mit wachsender Anzahl n nähert sich der Umfang eines regelmäßigen n-Ecks mit Umkreisdurchmesser 1 der Kreiszahl π „von unten“.
Mit wachsender Anzahl n nähert sich der Umfang eines regelmäßigen n-Ecks mit Inkreis-Durchmesser 1 der Zahl π „von oben“. π kann auf diese Weise in immer enger werdende Grenzen eingeschlossen werden. Bereits in der Antike verstand man, dass sich die Annäherungen „von unten“ und „von oben“ der gleichen Zahl nähern.



Die Kantenlänge eines regelmäßigen n-Ecks mit Umkreisdurchmesser 1 und Sektoren-Innenwinkel α ist, mit der Definition des Sinus: $\sin(\alpha/2)$.

Klaudios Ptolemaios hat um 150 in Alexandria die Sinus-Werte in $1/4°$-Schritten tabelliert und in seiner mathematischen Sammlung, auch genannt „Almagest“, veröffentlicht. (Die Tabelle läuft von $1/2°$ bis $180°$ und listet die doppelten Gradzahlen auf). Keiner dieser Werte weicht um 10^{-5} ab.

Im regelmäßigen n-Eck mit Umkreisdurchmesser 1 ist die Höhe eines Sektoren-Dreiecks über der Kante, mit der Definition des Cosinus: $1/2 \cos(\alpha/2)$.

Die Kantenlänge k_m des regelmäßigen $3 \cdot 2^n$-Ecks mit Inkreis-Durchmesser 1 ist, mit der Definition des Tangens: $\tan(\alpha/2) = \sin(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$; sie wird jeweils nach Euklid mit Strahlensatz aus Kante und Höhe des Sektoren-Dreiecks des dem Kreis eingeschriebenen n-Ecks berechnet.

Es ist für die $3 \cdot 2^n$ -Ecke:

$$k_6 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tan 30°, \quad k_{12} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \tan 15°, \quad k_{24} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \tan 7{,}5°,$$

$$k_{48} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = \tan 3{,}75°, \quad \text{und so weiter.}$$

Ähnliches gilt für $4 \cdot 2^n$- und $5 \cdot 2^n$-Ecke.

Die Fläche A_n eines regelmäßigen n-Ecks mit Umkreis-Radius 1 ist damit

$$A_n = \frac{n}{2} \cos \frac{360°}{2n} \, 2 \sin \frac{360°}{2n} = \frac{n}{2} \sin \frac{360°}{n}$$ und nähert sich mit wachsendem n der Kreiszahl π.

Die Beziehung $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ war schon früh bekannt und hat mit der Berechnung des Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel die Erstellung trigonometrischer Tafeln ermöglicht.
Das große Interesse der Mathematiker der Antike an regelmäßigen Vielecken galt vor allem den trigonometrischen Werten.