Die Zahlzeichen bei den Griechen und Römern der Antike

Eine kurze Übersicht über die im klassischen Altertum verwendeten griechischen und römischen Zahlzeichen, das Rechnen mit ihnen und den vorcäsarischen Kalender

von Dr. phil. Rudolf Haller.

Inhalt:

Edition Opera-Platonis 2006

Die älteren griechischen Zahlzeichen

Mindestens seit der Zeit des Gesetzgebers Solon (Athen ca. -638 bis -558) wurden Zahlen in einer Weise geschrieben, die sich in den römischen Zahlzeichen wiederfindet. Ihre Verwendung ist bis zum Ende der römischen Republik dokumentiert.

Die hier vorgestellte Darstellung erfolgt nach G. Friedlein „Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer“. Veranschaulicht wird dort auch das durchgehende Schreiben und Rechnen nach angeordneten Zehnerpotenzen in der Antike Ägyptens, Griechenlands und Roms.

Schreibung

Das Zahlzeichen für die Einer war ein senkrechter Strich, hier wird dafür I geschrieben.
Für Fünf verwendete man abkürzend Π (πέντε).
Das Zahlzeichen für Zehn war Δ (δέκα), für Hundert H (ἑκατόν),
für Tausend X (χίλιοι), für Zehntausend M (μυρίοι).

Für Fünfzig, Fünfhundert, Fünftausend und Fünfzigtausend verwendete man Δ, H, X und M derart, dass man diese Buchstaben zwischen die vertikalen Striche von Π schrieb.

Die Einer von Eins bis Neun wurden geschrieben:

I   II   III   IIII   Π   ΠI   ΠII   ΠIII   ΠIIII

Die Zehner von Zehn bis Neunzig:

Δ   ΔΔ   ΔΔΔ   ΔΔΔΔ   𐅄   𐅄Δ   𐅄ΔΔ   𐅄ΔΔΔ   𐅄ΔΔΔΔ

Die Hunderter von Einhundert bis Neunhundert:

H   HH   HHH   HHHH   𐅅   𐅅H   𐅅HH   𐅅HHH   𐅅HHHH

Die Tausender von Eintausend bis Neuntausend:

X   XX   XXX   XXXX   𐅆   𐅆X   𐅆XX   𐅆XXX   𐅆XXXX

Die Zehntausender von Zehntausend bis Neunzigtausend

M   MM   MMM   MMMM   𐅇   𐅇M   𐅇MM   𐅇MMM   𐅇MMMM

Noch größere Zahlen wurden als Produkte dargestellt.
Mit diesen älteren Zahlzeichen konnte man ebenso rechnen wie später mit den römischen Zahlzeichen.

Die griechischen Zahlbuchstaben

Seit man im Umkreis der Bibliothek von Alexandria (Kalimachus von Alexandria, um -248) mit der Zählung und Kennzeichnung der Zeilen, der Stichometrie, begann, verbreitete sich die Verwendung der Buchstaben zum Zahlenschreiben.

Die hier vorgestellte Darstellung erfolgt nach Kurt Sethe „Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern“ und G. Friedlein „Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer“.

Schreibung

Zahlen werden von links geschrieben, beginnend mit den höchsten Zehnerpotenzen.

Die Einer von Eins bis Neun:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
Alpha,	Beta,	Gamma,	Delta,	Epsilon,	Stigma,	Zeta,	Eta,	Theta

Die Zehner von Zehn bis Neunzig:

ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
Iota,	Kappa,	Lambda,	My,	Ny,	Xi,	Omikron,	Pi,	Qoppa

Die Hunderter von Einhundert bis Neunhundert:

ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Rho,	Sigma,	Tau,	Ypsilon,	Phi,	Chi,	Psi,	Omega,	Sampi

Die Tausender von Eintausend bis Neuntausend mit Beistrich:

,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ϛ	,ζ	,η	,θ

Für Zahlen ab Zehntausend wird M (Myriade) verwendet, wobei das Tausender-Vielfache über das M geschrieben wird.

δ
M,βρια für 42111.

Nach den ganzen Zahlen folgte die Benennung. Brüche wurden mit Acutus geschrieben, Zähler und Nenner mit Wortzwischenraum getrennt.
β´ für 1/2.
ε ιθ´ für 5/19.

Alle diese Zahlen wurden auch in Großbuchstaben geschrieben (jedoch nicht Groß- und Kleinbuchstaben vermischt).

Das Zeichen ō für Null wurde mit den stellenwertigen Sexagesimal-Zahlen der Astronomen verwendet.

Die römischen Zahlzeichen

Zahlen werden auf römische Weise mit Buchstaben geschrieben, die als Zahlzeichen dienen. Mit kleinen Gruppen von Zahlzeichen wird jeweils ein Wert für eine Zehnerpotenz angegeben. Die Zeichengruppe für den Wert einer größeren Zehnerpotenz steht stets links von der für die kleinere. Die Anordnung innerhalb der einzelnen Zeichengruppen ist festgelegt.

Mit der Schreibung nach Zehnerpotenzen behält die römische Schreibweise die wichtigste Grundlage der ägyptischen und griechischen Zahlendarstellung bei.

Die Einer von Eins bis Neun werden geschrieben:

I II III IV V VI VII VIII IX

Die Zehner von Zehn bis Neunzig werden geschrieben:

X XX XXX XL L LX LXX LXXX XC

Die Hunderter von Einhundert bis Neunhundert werden geschrieben:

C CC CCC CD D DC DCC DCCC CM

Tausender werden durch einen Strich über diesen Zahlzeichen geschrieben:
Die Tausender von Eintausend bis Neuntausend:

$\overline{\mathrm{I}}$ $\overline{\mathrm{II}}$ $\overline{\mathrm{III}}$ $\overline{\mathrm{IV}}$ $\overline{\mathrm{V}}$ $\overline{\mathrm{VI}}$ $\overline{\mathrm{VII}}$ $\overline{\mathrm{VIII}}$ $\overline{\mathrm{IX}}$

Entsprechend werden auch die Zehntausender und Hunderttausender mit Strich darüber geschrieben.

Für führende $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{II}}$, $\overline{\mathrm{III}}$ steht in populären Zahlenangaben M, MM, MMM.

Ein weiterer Strich über den Zahlzeichen bezeichnet jeweils eine weitere Vervielfachung des Zahlenwertes um den Faktor Tausend.

$\overline{\overline{\mathrm{I}}}$ steht für eine Million.

Zahlen beginnen von links mit den nach Zehnerpotenzen höchstwertigen Zahlzeichengruppen, hier zur Verdeutlichung durch Zwischenräume etwas abgesetzt.

M DCC XC I für 1791,

$\overline{\mathrm{IV}}$ XXX für 4030.

Die zu lernenden Zahlbuchstaben der Reihe nach von rechts nach links: DCLXVI für 666.

Die Schreibung mit Apostrophen statt Querstrichen war gebräuchlich.
Also: XV'' C' D für 15'100'500.

Für ½ war auch S (semis) geläufig; es stand stets als letztes Zeichen rechts. So: IS für 1½.

Die älteren Schreibweisen für IV, XL, CD waren IIII, XXXX, CCCC
und die für IX, XC, CM waren VIIII, LXXXX, DCCCC. Die Einführung der späteren kürzeren Schreibweise bedeutete lediglich die Verbreitung einer Schreibkonvention.

Die als „arabisch“ bezeichneten Ziffern wurden ab dem 11. Jahrhundert bekannt; sie entstanden aus handschriftlichen Ligaturen der ersten neun römischen Zahlen.

Addition

Obwohl die römischen Zahlen Dezimalzahlen sind und das Rechnen mit ihnen nach dem Dezimalsystem erfolgt, gibt es für das einfache Addieren und Subtrahieren die Möglichkeit der Zeichenmanipulation, bei der, und auch nur hierbei, die kleinen Zeichengruppen aufgelöst werden. Die einzelnen Zeichen werden dann nach ihren Werten angeordnet.

Für solch einfache Rechnungen empfiehlt sich die Schreibweise nach der älteren Konvention.

Man braucht dann nur zu wissen, dass

IIIII	zu	V,
VV	zu	X,
XXXXX	zu	L,
LL	zu	C,
CCCCC	zu	D,
DD	zu	M

zusammenzufassen sind und die abschließende Schreibung dadurch bereinigt wird.
Entsprechend sind die gestrichenen Zahlzeichen, die ja Vielfache von Tausend darstellen, zu handhaben.

Beim Addieren schreibt man die Zahlzeichen der beiden Summanden nach Zehnerpotenzen geordnet zusammen (additio, *hinzutun*).

X II plus V ergibt X VII.

XX VI plus V ergibt XX VV I, bereinigt XXXI.

CC XX II plus LX VIII ergibt CC LXXX VIIIII, bereinigt CC LXXXX.

Mit kleinen Nebenrechnungen geht man jedoch schon auf das Zahlenrechnen über, bei dem die Zeichengruppen der Zahlen nicht mehr aufgelöst werden, und verzichtet dabei auf das Anschreiben von Zwischenschritten.

Bei der Addition mit Zahlenrechnen nach dem herkömmlichen Schema sind die Spalten nach den Zehnerpotenzen anzulegen:

Spalte Tausender	Spalte Hunderter	Spalte Zehner	Spalte Einer	
M	CC		VIII	Summand
		LXX	VI	Summand
M		XL	VII	Summand
	C	XX		Übertrag
MM	CCC	XXX	I	Ergebnis

Subtraktion

Um das Subtrahieren mit römischen Zahlen nach der älteren Schreibkonvention zu lernen, braucht man nur zu wissen, dass, wenn nötig,

V zu IIIII
X zu VV
L zu XXXXX,
C zu LL
D zu CCCCC,
M zu DD,

auseinanderzuziehen sind, so dass aus dieser expandierten Darstellung das Wegnehmen der Zahlzeichen erfolgen kann.

Man streicht die Zahlzeichen des Subtrahenden im Minuenden aus (subtrahere, *entfernen*). Dazu muss, wenn man es ausführlich schreiben will, gegebenenfalls der Minuend expandiert werden.

XXXVIII minus XVI ergibt XX~~XV~~II~~I~~, das ist XXII.

LXX VI minus XXX III ist
XXXXX XX IIIII I minus XXX III, ergibt XXXXX XX IIIII I,
das ist XXXXIII.

Mit kleinen Nebenrechnungen, wenn bereits einige Schritte gelernt wurden, geht man wieder auf das Zahlenrechnen über, wobei selbstverständlich die Zeichengruppen nicht mehr auseinandergezogen werden.

M V minus XXI ergibt DCCCC LXXX IIII.

Auch die Subtraktion kann nach einem Schema mit Anordnung nach den Zehnerpotenzen erfolgen, wobei entsprechende Spalten anzulegen sind.

Für die übrigen Teile der auf diesen Seiten gegebenen Darstellung wird aber die neuere Schreibkonvention der römischen Zahlen verwendet.

Multiplikation

Beim Multiplizieren und Dividieren römischer Zahlen spielen Verdoppeln und Halbieren eine wichtige Rolle. Die mathematische Grundlage dieser Algorithmen ist die Binärexpansion der Zahlen.

Halbieren und Verdoppeln

Man halbiert eine ganze Zahl, indem man von links nach rechts durch die Gruppen der Zehnerpotenzen rechnet. Eine ungerade Zahl lässt dabei als Rest zehn Einheiten der nächst niedrigeren Zehnerpotenz, die dort dazu gezählt werden.

Man verdoppelt eine Zahl, indem man von rechts nach links rechnet. Ergibt sich in einer Gruppe ein Ergebnis größer Neun, addiert man eine Einheit zur nächsthöheren Zehnerpotenz.

Zum Multiplizieren schreibt man jeweils eine Kolumne unter die Faktoren; die erste mit fortlaufender Halbierung bis Eins, wobei Reste entfallen, die andere mit fortlaufender Verdopplung. Die Zahlen der rechten Kolumne, denen gegenüber in der linken Kolumne eine ungerade Zahl steht, werden addiert und ergeben das Ergebnis (Zahlen, denen eine gerade Zahl gegenübersteht, werden ignoriert).

Beispiele:

VIII mal VII
IV XIV
II XXVIII
I LVI
die einzige ungerade Zahl in der linken Kolumne steht in der letzten Zeile,
das Ergebnis LVI steht rechts davon.

XII mal VIII
VI XVI
III XXXII
I LXIV
man addiert:
XXX II plus LX IV ergibt LXXXX VI, das ist bereinigt XCVI.

Man kann auch nach dem herkömmlichen Schema rechnen, bei dem die Spalten nach den Zehnerpotenzen angeordnet werden.

Division

Auch beim Dividieren legt man zwei Kolumnen an.

In der ersten Kolumne beginnt man mit Eins und verdoppelt in jeder Zeile.

In der zweiten Kolumne beginnt man mit dem Divisor und verdoppelt in jeder Zeile bis der Dividend gerade noch nicht überschritten wird - „man multipliziert um zu dividieren“.

Man rechnet dann in der rechten Kolumne von unten nach oben.

In der untersten Zeile wird vom Dividenden die Zahl in der rechten Kolumne abgezogen. Die Zahl der linken Kolumne zählt zum Ergebnis, mit dem Ergebnis der Subtraktion wird in der Zeile darüber weiter gerechnet und es wird die Zahl in der rechten Kolumne vom bisherigen Ergebnis subtrahiert.

Ist der Wert in der rechten Kolumne der nächstoberen Zeile größer als das bisherige Ergebnis, wird diese Zeile übersprungen, wobei dann der übersprungene Wert der linken Kolumne nicht zum Ergebnis zählt..

Zum Schluss werden die Ergebniszahlen aus der linken Kolumne addiert. In der obersten Zeile ergibt sich der Divisionsrest.

CXLV : XIII =

I	XIII	XV minus XIII ergibt Divisionsrest II
II	XXVI	XLI minus XXVI ergibt XV
IV	LII	wird übersprungen, da LII größer als XLI
VIII	CIV	CXLV minus CIV ergibt XLI

Ergebnis: I plus II plus VIII = XI, Divisionsrest II.

MCCXXXIV : XXIII =

I	XXIII	XXXVIII minus XXIII ergibt Divisionsrest XV
II	XLVI	
IV	XCII	CXXX minus XCII ergibt XXXVIII
VIII	CLXXXIV	
XVI	CCCLXVIII	CDXCVIII minus CCCLXVIII ergibt CXXX
XXXII	DCCXXXVI	MCCXXXIV minus DCCXXXVI ergibt CDXCVIII

Ergebnis: I plus IV plus XVI plus XXXII = LIII, Divisionsrest XV.

Selbstverständlich kann auch die Division nach einem herkömmlichen Schema mit Anordnung nach Zehnerpotenzen erfolgen.

Brüche

Ein Bruch wie 12/13, der wie eine nicht ausgeführte Division erscheint, wird in der Moderne eventuell in einen Dezimalbruch umgewandelt.

Die Mathematiker der Antike haben gebrochen rationale Zahlen in einer Stammbruchreihe dargestellt. Die Anschauung dazu lieferte der Gebrauch der Gewichte auf der Balkenwaage.

Da ein Stammbruch stets den Zähler Eins hat, wird er beim Schreiben weggelassen.

Die Hintereinanderschreibung der Stammbrüche bedeutet ihre Addition.

VI /II /XII steht für Sechs und ein Halb und ein Zwölftel (Sechs und sieben Zwölftel).

Ein Näherungswert für die Kreiszahl ist: III /VIII /LXI /$\overline{\text{V}}$XX.

Um die zugehörigen Stammbrüche zu finden, wird der Zähler des Bruches additiv zerlegt:

VII : XII
- VI : XII (/II)
I : XII (/XII)

VII : XII = /II /XII

Wie Heron in seinen Beispielen gezeigt hat, subtrahiert man die Stammbrüche der Reihe nach von den erweiterten Brüchen:

XII : XIII = XXIV : XXVI (mit 2 erweitert)
- XIII : XXVI (/II von XXVI)
XI : XXVI = XXXIII : LXXVIII (mit 3 erweitert)
- XXVI : LXXVIII (/III)
VII : LXXVIII = XIV : CLVI (mit 2 erweitert)
- XIII : CLVI (/XII)
I : CLVI (/CLVI)

Ergebnis: XII : XIII = /II /III /XII /CLVI.

Man bestimmt die größtmöglichen Stammbrüche, indem man jeweils als Erweiterung des Bruches den ganzzahlig aufgerundeten Kehrwert des gegebenen Bruches nimmt.
Diese Erweiterung wird dann auch Nenner des nächsten Teilergebnisses.

VII : XVII = XXI : LI (XVII : VII ≥ II, Erweiterung des Bruches: III)
- XVII : LI (/III)
IV : LI = LII : DCLXIII (LI : IV ≥ XII, Erweiterung XIII)
- LI : DCLXIII (/XIII)
I : DCLXIII (/DCLXIII)

Ergebnis: VII : XVII = /III /XIII /DCLXIII.

Jede positive rationale Zahl kleiner Eins kann mit einer abbrechenden Stammbruchreihe dargestellt werden.

Die größtmöglichen Stammbrüche

Zur eindeutigen Vergleichbarkeit von Stammbruchreihen werden sie mit den größtmöglichen Stammbrüchen gebildet.

Es ist zum, Beispiel, /IV /XVI mit den größtmöglichen Stammbrüchen gebildet, denn V : XVI ist mit IV, der kleinsten ganzen Zahl größer als XVI : V, zu erweitern.
Es ist also V : XVI = XX : LXIV = /IV /XVI.

Es ist, zum Beispiel /IV /VIII nicht mit den größtmöglichen Stammbrüchen gebildet, denn III : VIII (II < VIII : III < III) ist mit III zu erweitern, und damit /IV /VIII = /III /XXIV.
Offensichtlich ist /III der bessere Näherungswert für den ganzen Ausdruck, falls die Stammbruchreihe abgebrochen wird.

Addition von Stammbruchreihen

Stammbruchreihen werden gliedweise von rechts mit den kleinsten Werten beginnend addiert.
Die Teilsummen werden vor dem Weiterrechnen in größtmögliche Stammbrüche umgeformt.

Beispiel:

/II /IV + /III /VIII
/II /IV
/VIII
/II /III /XXIV
/III
/II /II /VI /XXIV = I /VI /XXIV

Subtraktion von Stammbruchreihen

Stammbruchreihen werden gliedweise von links beginnend mit dem kleinsten Glied des Minuenden, das größer ist als das größte des Subtrahenden, subtrahiert.

Auch hier werden die Zwischenergebnisse, wenn nötig, vor dem Weiterrechnen in größtmögliche Stammbrüche umgeformt.

Beispiel:

/II /IV — /III /VIII
/II /IV
/III
/VI /IV =
/IV /VI (umgeordnet)
/VIII
/IV /XXIV

Multiplikation von Stammbruchreihen

Man multipliziert zwei Stammbrüche indem man ihre Nenner multipliziert:

1/a · 1/b = 1/(a · b)

Stammbruchreihen werden gliedweise nach dem Distributionsgesetz multipliziert, wobei die Zwischenergebnisse, wenn nötig, zu größtmöglichen Stammbrüchen umgeformt werden.

Beispiel:

/II /IV · /III /VIII

/II /IV · /III	/II /IV · /VIII
= /VI /XII	= /XVI /XXXII
= /IV	= /XI /CCCLII

/IV /XI /CCCLII
= /III /XCVI

Division von Stammbruchreihen

Man dividiert einen Stammbruch durch einen anderen, indem man den Nenner des Divisors durch den Nenner des Dividenden teilt und die Stammbruchreihe neu ausrechnet:

1/a : 1/b = b : a.

Zur Division mit einer Stammbruchreihe bringt man den Divisor auf den Hauptnenner und Multipliziert mit dem Kehrwert.

Beispiel:

/II /IV : /III /VIII

= /II /IV : (XI : XXIV)

= /II /IV * XXIV : XI

= (XII + VI) : XI = XVIII : XI = I /II /VIII /LXXXVIII

Quadratwurzel nach Heron

Die Aufgabe der Flächenverdopplung eines Quadrats wurde in der Antike vollständig gelöst. Die geometrische Lösung besteht darin, das Quadrat über der Diagonalen des Ausgangsquadrats zu errichten.

Hat das Ausgangsquadrat die Seitenlänge 1, dann hat das verdoppelte Quadrat die Seitenlänge derjenigen Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

Die Quadratwurzel aus 2 kann nicht mit Brüchen ganzer Zahlen dargestellt werden; dies wurde schon in der Antike mit indirektem Beweis gezeigt. Trotz dieser Unmöglichkeit liefern Brüche Näherungswerte zu einer berechenbaren Genauigkeit.

Heron (ca. 20 - 62) hat in Alexandria ein schnelles Verfahren zur Näherungslösung einer Quadratwurzel aus einer beliebigen Zahl bekannt gemacht.

Es wird dazu die Division mit einer gemischten Zahl und die Berechnung des arithmetischen Mittels zweier Zahlen benötigt.

arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel $(a + b)/2$ zweier gemischter Zahlen mit Stammbrüchen wird berechnet, indem man die ganzen Zahlen addiert und die Summe halbiert. Kommt der gleiche Stammbruch in beiden Zahlen vor, wird er in das Ergebnis übernommen, ist er nur einmal vorhanden, wird der Nenner verdoppelt.

Das arithmetische Mittel aus II und II /II ist II /IV,
das aus X /II /IV und II /II ist VI /II /VIII.

Zur Berechnung der Quadratwurzel aus der positiven Zahl k wird das gesuchte Ergebnis durch euklidische Intervallschachtelung der Intervalle $[a_n, b_n]$ eingegrenzt.

Man beginnt mit den Näherungswerten a_0 und b_0, $a_0^2 < k$, $b_0^2 > k$, und dem Intervall $[a_0, b_0]$.
Das Verfahren ist selbstkorrigierend.

Es ist dann für $n > 1$ zu berechnen:
$a_{n+1} = k/b_n$ damit ist $1 : a_{n+1} = b_n : k$ (vier Zahlen in Proportion),
$b_{n+1} = (b_n + a_{n+1})/2$ (arithmetisches Mittel, $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/2$).

Beispiel: Quadratwurzel aus II:

	a_{n+1} = II : b_n	$b_{n+1} = (b_n + a_{n+1})$: II	
	a_0 = I	b_0 = I /II	(erste Näherungswerte von unten und von oben)
n	a_n	b_n	
1	I /III	I /III /XII	
2	I /III /XVII /LI	I /III /XIII /CDVIII /DCLXIII	

Bricht man also nach 2 Iterationen ab, ist hier der letzte Wert bereits auf 10^{-5} genau.
Die beiden letzten Glieder der Stammbruchreihe sind jedoch noch nicht sicher. Das Ergebnis würde durch Weiterrechnen auf I /III /XIII /CCLIII verbessert.

Bei der Bestimmung von Näherungswerten für irrationale Zahlen nimmt in der Stammbruchreihe der jeweils nächstfolgende Stammbruch die Größenordnung des Quadrats des vorher letzten Glieds der Stammbruchreihe an, was die Abschätzung des Abbruchfehlers erlaubt.

Würfelverdopplung

Die Aufgabe, das Volumen eines Würfels zu verdoppeln und die dafür erforderliche neue Kantenlänge für den verdoppelten Würfel zu finden, hat zu vielen Anregungen geführt.

Hippokrates aus Chios (ca. -470 bis -410) erkannte, dass die Lösung gefunden wird, indem man das richtige mittlere Verhältnis für das ursprüngliche Volumen a und das doppelte Volumen 2a sucht:
$a : x = x : y = y : 2a$.
Aus $a : x = x : y$ erhält man $a \cdot y = x \cdot x$.
Ist $a = 1$ der Ausgangswert, dann ist $y = x \cdot x$ und $1 : x = x : (x \cdot x) = (x \cdot x) : 2$
Damit ist $x \cdot x \cdot x = 2$
und x ist demzufolge diejenige Zahl, die dreimal als Faktor genommen 2 ergibt; diese Zahl ist durch Brüche aus ganzen Zahlen nicht darstellbar.

Die Berechnung der Näherungswerte der Kubikwurzel aus k erfolgt ähnlich wie die der Quadratwurzel nach Heron mit einer entsprechenden euklidischen Intervallschachtelung.

Man beginnt für $k > 1$ mit den Näherungswerten a_0 und b_0, so dass $a_0^3 < k$ und $b_0^3 > k$,

und dem Intervall $[a_0, b_0]$. Das Verfahren ist selbstkorrigierend.

Es sind dann zu berechnen:
$a_{n+1} = k/b_n^2$, wobei $1 : a_{n+1} = b_n^2 : k$ (Ergänzung der Proportion) und
$b_{n+1} = (2\,b_n + a_{n+1})/3$ (arithmetisches Drittel, $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/3$).

Beispiel: Kubikwurzel aus II:

	$a_{n+1} = \mathrm{II} : b_n^2$	$b_{n+1} = (\mathrm{II} \cdot b_n + a_{n+1}) : \mathrm{III}$	
	$a_0 = \mathrm{I}$	$b_0 = \mathrm{I}\,/\mathrm{III}$	(erste Näherungswerte)
n	a_n	b_n	
1	I /VIII	I /IV /LXXII	
2	I /IV /CDXCIV	I /IV /CI	

Obwohl in der 2ten Zeile gerundet wurde, ist der letzte Wert auf 10^{-5} genau.

Ein Würfel mit der Kantenlänge .I /IV /CI. hat den Rauminhalt .II. mit der angegebenen Genauigkeit.

Beliebige Wurzeln

Die m-te Wurzel aus $k > 1$ wird durch euklidische Schachtelung der Intervalle $[a_n, b_n]$,
mit $a_0 = 1$ und b_0, so dass $b_0^m > k$ und $a_1 > 1$, eingegrenzt:

$a_{n+1} = k/b_n^{m-1}$, wobei $1 : a_{n+1} = b_n^{m-1} : k$ (Ergänzung der Proportion),
$b_{n+1} = ((m-1) \cdot b_n + a_{n+1})/m$ (arithmetisches m-Teil: $b_{n+1} = b_n + (a_{n+1} - b_n)/m$).

Eine Schreibkonvention für Dezimalzahlen

Die dezimalen Zahlensysteme der Ägypter, Griechen und Römer haben, unter vielem anderen, die Entwicklung der Mathematik ermöglicht.

Die Schreibweise mit den zehn durch je ein Zahlzeichen notierten Zahlen wurde seit dem 12ten Jahrhundert aus praktischen Gründen mitsamt seiner dazu erforderlichen tabellarischen Darstellung zunehmend angewandt. Dazu wurden die ersten neun römischen Zahlzeichengruppen zu je einem Zeichen handschriftlich kursiv verschmolzen und die Null, die aufgrund der tabellarischen Schreibweise intensiv zu verwenden war, von der griechischen tabellarischen Notation übernommen.

Das einheitliche Rechnen mit Dezimalbrüchen, das später dazukam, hat dem dezimalen Stellenwertsystem zum endgültigen Durchbruch verholfen, so dass es gegenwärtig zur allgemeinen Schreibkonvention bei manueller Verwendung geworden ist.

Ein frühes Beispiel für das Rechnen mit Dezimalbrüchen findet sich in dem im Jahr 1600 gedruckten Rechenbuch von Simon Jacob.

Die Flächen beliebiger Dreiecke

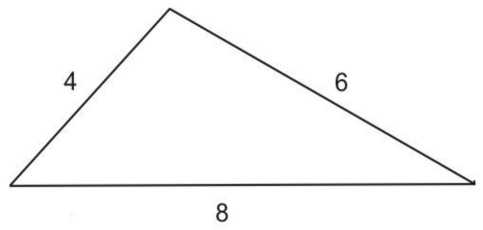
Von Heron ist ein Berechnungsverfahren für den Flächeninhalt beliebiger Dreiecke, von denen die Seitenlängen bekannt sind, überliefert.

Für die Seitenlängen a, b, c ist der Flächeninhalt A

$$A = 1/4 \ \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung (Stoicheia I.20) ist jeder der Faktoren unter dem Wurzelzeichen größer Null.

Beispiel:



Für ein Dreieck mit den Seiten 4, 6, 8 Längeneinheiten ist somit

a+b+c	a+b-c	a+c-b	b+c-a	Produkt
18	2	6	10	2160
			Wurzel daraus	$12\sqrt{15}$
			¼ davon	$3\sqrt{15}$

Das Ergebnis: $3\sqrt{15}$ Flächeneinheiten.

Weiteres Beispiel:

Für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit den Seitenlängen 1 ergibt sich mit einfacher Rechnung: $1/4\sqrt{3}$

Rechtwinklige Dreiecke und pythagoräische Tripel

Heron von Alexandria hat in seinem Werk „Geometrica“ (Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia, Vol. IV, Stuttgart 1976, S. 221) eine Methode Platons angegeben, um rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen zu konstruieren:

Gehe von einer geraden Zahl (größer 2) aus.	$2n + 2$
Es sei für die Kathete die Zahl 8 gegeben.	
Nimm die Hälfte: 4.	$n + 1$
Bilde das Quadrat: 4 * 4 = 16.	$(n + 1)^2$
Nimm 1 weg: 16 - 1 = 15. So viel die Grundlinie.	$(n + 1)^2 - 1$
Grundlinie +2 ergibt 17, dies wird die Hypotenuse sein.	$(n + 1)^2 +1$

In diesem Zahlenbeispiel wird das Tripel [8, 15, 17] mit $a^2 + b^2 = c^2$ gefunden.

Der letzten Zeile der Verfahrensvorschrift ist zu entnehmen, dass damit Tripel gefunden werden, bei denen Kathete und Hypotenuse die Differenz 2 aufweisen. Offensichtlich sind mit der überlieferten Anleitung unbegrenzt viele sogenannte pythagoräische Tripel auffindbar.

Allgemein erhält man bei $a = 2n +2$
für die andere Kathete $b = (n + 1)^2 -1$
und für die Hypotenuse $c = (n + 1)^2 +1 = b + 2$.

Es gibt allerdings, was Heron nicht überliefert hat, zu jeder ganzzahligen Differenz zwischen einer der Katheten und der Hypotenuse unbegrenzt viele quadratische Tripel, wenn auch nicht stets in kleinsten Zahlen, also solche, die nicht Vielfache eines anderen sind.

Ist die Differenz $d = c - b$ von Kathete b und Hypotenuse c, dann ist
für alle natürlichen Zahlen $n > 0$:

$d = 1$:	$a = 2n +1$,	$c = (a^2 +1)/2$,
$d = 2$:	$a = 2n +2$,	$c = (a^2 +2^2)/4 = (n + 1)^2 +1$,
$d = 3$:	$a = 6n +3$;	$c = (a^2 +3^2)/6$,
$d = 4$:	$a = 4n +4$,	$c = (a^2 +4^2)/8$,
$d = 5$:	$a = 10n +5$,	$c = (a^2 +5^2)/10$,
$d = 6$:	$a = 6n +6$,	$c = (a^2 +6^2)/12$,
$d = 7$:	$a = 14n +7$,	$c = (a^2 +7^2)/14$,
$d = 8$:	$a = 4n +8$,	$c = (a^2 +8^2)/16$,
$d = 9$:	$a = 6n +9$,	$c = (a^2 +9^2)/18$,
$d = 10$:	$a = 10n +10$,	$c = (a^2 +10^2)/20$,

und so weiter.

Stets ist dabei $a = t \cdot n + d$.
Ist $2d$ eine Quadratzahl oder Vielfache einer Quadratzahl q^2, dann ist $t = 2d/q$, sonst $2d$.
Es ist dann $c = (a^2 + d^2)/2d$ die Größe der Hypotenuse und $b = c - d$ die der anderen Kathete im rechtwinkligen Dreieck.

Auf diese Weise können alle quadratischen Tripel in Abhängigkeit von d und n berechnet werden.

Nicht für alle d sind Tripel in kleinsten Zahlen zu finden. Die Differenz d zwischen Hypotenuse und einer Kathete rechtwinkliger Dreiecke in Tripeln kleinster Zahlen nimmt
für alle natürlichen Zahlen $m = 1, 2, 3, \ldots$, die Werte $d = 2\,m^2$, wobei a ein Vielfaches von 4,
sowie die Werte $d = (2m-1)^2$, wobei b ein Vielfaches von 4 ist, an.
Davon sind diejenigen Tripel zu kleinsten Zahlen gekürzt, deren c nicht durch die einzelnen Primfaktoren von d ohne Rest teilbar ist.

In der beigefügten Tabelle "Die quadratischen Tripel" werden ganzzahlige Tripel in der Anordnung [a, c, b] aufgelistet mit Hervorhebung der Tripel in kleinsten Zahlen.

Die Quadratur des Kreises

Die Aufgabe der Quadratur des Kreises besteht darin, zu einem gegebenen Kreis mit bekanntem Radius r die Seitenlänge a eines Quadrats anzugeben, das den gleichen Flächeninhalt hat.

Allgemein bekannt geworden ist diese Aufgabe damit, dass sie geometrisch nur mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist.

Mit Euklid (ca. -323 bis -283) gilt für zwei Kreise mit Radien r_1 und r_2 und Flächen A_1 und A_2
$r_1^2 : r_2^2 = A_1 : A_2$
und für ihre Durchmesser d_1 und d_2 und ihre Umfänge U_1 und U_2: $d_1 : d_2 = U_1 : U_2$
mit dem Proportionalitätsfaktor, der seit Leonhard Euler (1707 bis 1783) mit π bezeichnet wird.

Auch π kann nicht mit Brüchen ganzer Zahlen dargestellt werden. Die Berechnung von Näherungswerten mit Brüchen, Stammbrüchen oder Dezimalbrüchen, führt deshalb zu beliebig lange fortsetzbaren Reihen, wenn die zu erzielende Genauigkeit nicht angegeben wird.

Brauchbare Näherungswerte für π wurden mit der Berechnung des Umfangs von regelmäßigen Vielecken erzielt, die einem Kreis mit Durchmesser 1 eingeschrieben sind.

Hat ein regelmäßiges Sechseck einen Umkreis mit Durchmesser 1, so bestehen seine 6 Sektoren, wegen ihrer Innenwinkel von 60°, aus gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1/2.
Der Umfang dieses Sechsecks ist deshalb $6 \cdot 1/2 = 3$, was einen ersten Näherungswert 3 liefert.

Zieht man in den Sektoren des $3 \cdot 2^n$-Ecks die Mittelsenkrechten zur äußeren Seite um ein regelmäßiges $3 \cdot 2^{n+1}$-Eck zu konstruieren, ist die Höhe des Sektoren-Dreiecks über der äußeren Seite, der Kante k_n, für natürliche Zahlen n, mit dem Satz vom rechtwinkligen Dreieck (Stoicheia I.47):

$$h_n = \sqrt{1/4 - 1/4\, a_n^2}$$

und die Seitenlänge k_{2n} des regelmäßigen $3 \cdot 2^{n+1}$-Ecks :

$$k_{2n} = \sqrt{1/2 - h_n} = \sqrt{1/2 - 1/2\sqrt{1 - a_n^2}}$$

Damit ist der Umfang U_m regelmäßiger $3 \cdot 2^n$-Ecke, für $m = 3 \cdot 2^n$, mit Umkreisdurchmesser 1:

$$U_{12} = 3 \cdot 2^2 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$U_{24} = 3 \cdot 2^3 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$U_{48} = 3 \cdot 2^4 \cdot 1/2 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

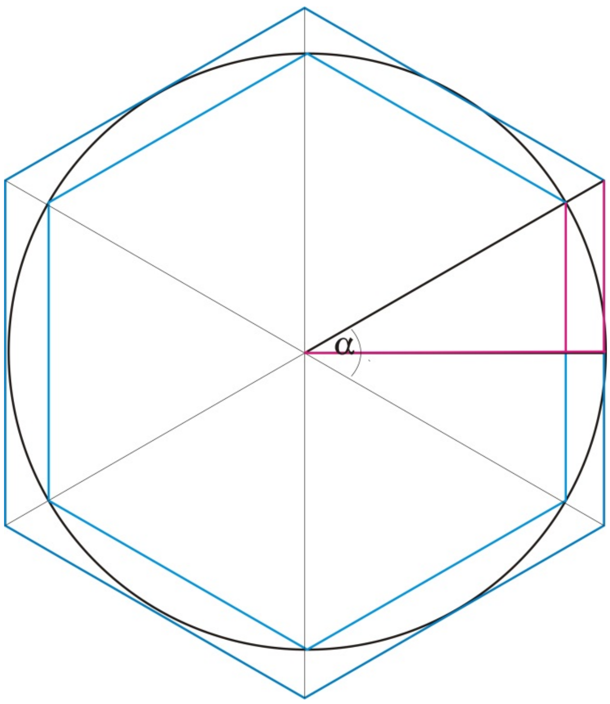
. . .

Von Archimedes (ca. -285 bis -212) ist überliefert, dass er zur Bestimmung eines verbesserten Näherungswertes für die Kreiszahl ein 96-Eck berechnet habe.

Zieht man mit Heron die Quadratwurzel aus dem Näherungswert
π = III /VIII /LXI /$\overline{\text{V}}$XX
erhält man den Näherungswert
$\sqrt{\pi}$ = I /II /IV /XLV
als Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1.

Trigonometrische Werte

Mit wachsender Anzahl n nähert sich der Umfang eines regelmäßigen n-Ecks mit Umkreis-Durchmesser 1 der Kreiszahl π „von unten“.
Mit wachsender Anzahl n nähert sich der Umfang eines regelmäßigen n-Ecks mit Inkreis-Durchmesser 1 der Zahl π „von oben“.
π kann auf diese Weise in immer enger werdende Grenzen eingeschlossen werden. Bereits in der Antike verstand man, dass sich die Annäherungen „von unten“ und „von oben“ der gleichen Zahl nähern.



Die Länge der Seite eines regelmäßigen n-Ecks mit Umkreis-Durchmesser 1 und Sektoren-Innenwinkel α ist, mit der Definition des Sinus: $\sin(\alpha/2)$.

Klaudios Ptolemaios hat um 150 in Alexandria die Sinus-Werte in $1/4°$-Schritten tabelliert und in seiner mathematischen Sammlung, auch genannt „Almagest“, veröffentlicht. (Die Tabelle läuft von $1/2°$ bis $180°$ und listet die doppelten Gradzahlen auf). Keiner dieser Werte weicht um 10^{-5} ab.

Im regelmäßigen n-Eck mit Umkreis-Durchmesser 1 ist die Höhe eines Sektoren-Dreiecks über der äußeren Seite, mit der Definition des Cosinus: $1/2 \cos(\alpha/2)$.

Die Seitenlänge k_m des regelmäßigen $3 \cdot 2^n$-Ecks mit Inkreis-Durchmesser 1 ist, mit der Definition des Tangens: $\tan(\alpha/2) = \sin(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$; sie wird jeweils nach Euklid mit Strahlensatz aus Seite und Höhe des Sektoren-Dreiecks des dem Kreis eingeschriebenen Polygons berechnet.

Es ist für die $3 \cdot 2^n$ -Ecke, n = 1, 2, 3, ...:

$$k_6 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tan 30°, \quad k_{12} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \tan 15°, \quad k_{24} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \tan 7{,}5°,$$

$$k_{48} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = \tan 3{,}75°, \quad k_{96} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} = \tan 1{,}875°, \quad \text{und so weiter.}$$

Ähnliches gilt für $4 \cdot 2^n$- und $5 \cdot 2^n$-Ecke, die als weitere reguläre Polygone ebenfalls zur Berechnung von Näherungswerten geeignet sind .

Die Fläche A_n eines regelmäßigen n-Ecks mit Umkreis-Radius 1 ist damit

$$A_n = \frac{n}{2} \cos \frac{360°}{2n} \; 2 \sin \frac{360°}{2n} = \frac{n}{2} \sin \frac{360°}{n}$$ und nähert sich mit wachsendem n der Kreiszahl π.

Die Beziehung $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ war schon früh bekannt und hat mit der Berechnung des Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel die Erstellung trigonometrischer Tafeln ermöglicht.
Das große Interesse der Mathematiker der Antike an regelmäßigen Vielecken galt vor allem den trigonometrischen Werten.

weitere reguläre Polygone

Bei Inkreis-Durchmesser 1 nähert sich der Umfang der regulären Polygone mit wachsender Anzahl der Ecken der Kreiszahl π „von oben".

Mit $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ sind die Seiten k_n, der, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

4 • 2ⁿ-Ecke:

4-Eck: $$k_4 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \tan(45°) = 1,$$

8-Eck: $$k_8 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad \tan(22{,}5°) = -1 + \sqrt{2},$$

16-Eck: $$k_{16} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \tan(11{,}25°),$$

32-Eck: $$k_{32} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = \tan(5{,}625°),$$

64-Eck: $$k_{64} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}} = \tan(2{,}8125°), \quad \text{und so weiter,}$$

5 • 2ⁿ-Ecke:

5-Eck: $$k_5 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)} = \tan(36°) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

10-Eck: $$k_{10} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} = \tan(18°),$$

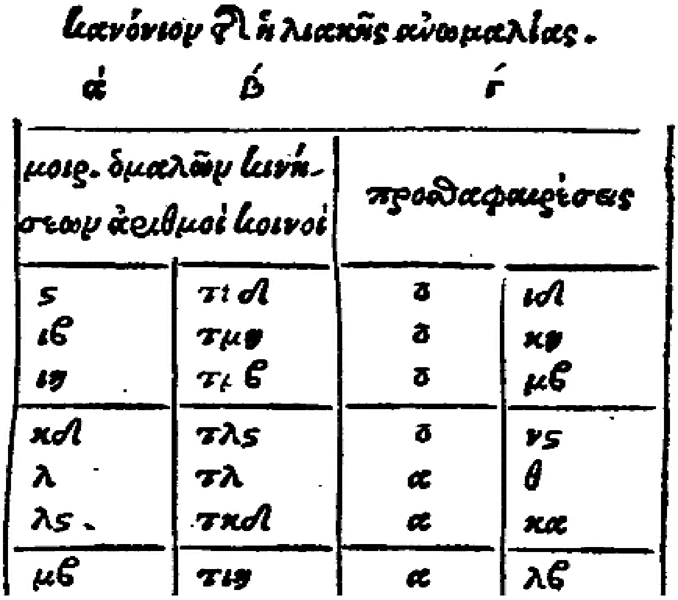
20-Eck: $$k_{20} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}} = \tan(9°),$$

40-Eck: $$k_{40} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}} = \tan(4{,}5°)$$

80-Eck: $$k_{80} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}} = \tan(2{,}25°), \quad \text{und so weiter.}$$

Über die Null

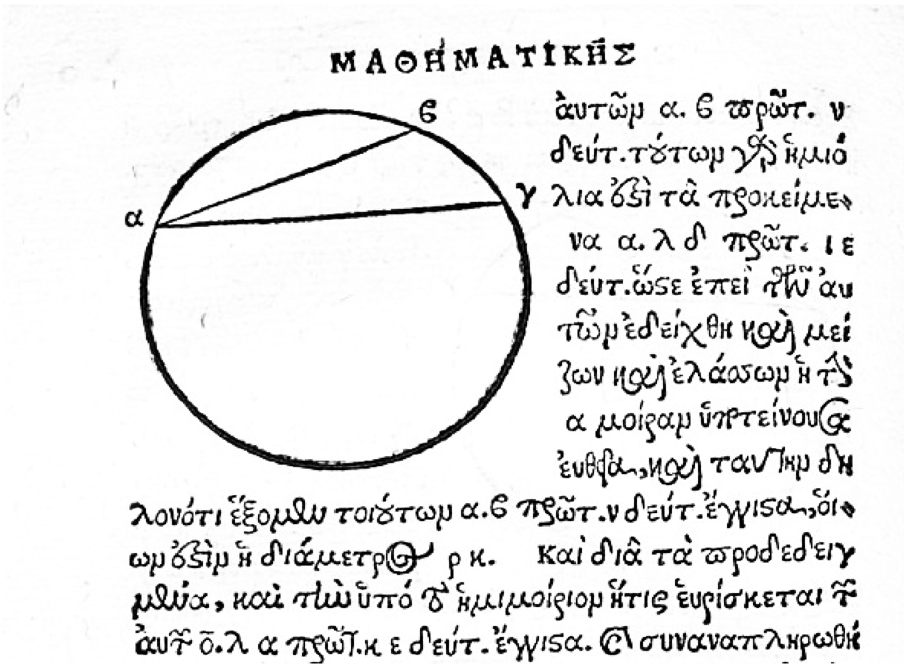
Von den trigonometrischen Tabellen der „Mathematischen Sammlung“, bekannt auch als „Almagest“, des Klaudios Ptolemaios (ca. 100 bis 160) gingen wesentliche Anregungen aus. Sie enthalten tabellarisch Werte für Grad und Minuten (60^{-1} Grad), die an den Stellen, an denen einer dieser Werte Null ist, das Zeichen ō enthalten, wie hier im dritten Buch über die Anomalien der Sonne:



κανόνιον τῆς ἡλιακῆς ἀνωμαλίας.

α	β	γ	
μοιρ. ὁμαλῶν κινήσεων ἀριθμοὶ κοινοί		προσθαφαιρέσεις	
ς	τνδ	ō	ιδ
ιβ	τμη	ō	κη
ιη	τμβ	ō	μβ
κδ	τλς	ō	νς
λ	τλ	α	θ
λς	τκδ	α	κα
μβ	τιη	α	λβ

Aber auch der Text enthält vielfach dieses Zeichen in korrekter Stellenwert-Schreibweise, so zum Beispiel in dem abgebildeten Textteil, wobei der obere Querstrich zur Unterscheidung der Null vom Zeichen für die Zahl 70 diente.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

αὐτῶν α. β πρώτ. ν
δεύτ. τούτων γὰρ ἡμιό
λια ἐστὶ τὰ προκείμε-
να α. λ δ πρώτ. ιε
δεύτ. ὥστε ἐπεὶ τῶν αὐ
τῶν ἐδείχθη καὶ μεί
ζων καὶ ἐλάσσων ἡ τῆς
α μοίρας ὑποτείνουσα
εὐθεῖα, καὶ ταύτην δη
λονότι ἕξομεν τοιούτων α. β πρώτ. ν δεύτ. ἔγγιστα, οἵ
ων ἐστὶν ἡ διάμετρος ρκ. Καὶ διὰ τὰ προδεδειγ
μένα, καὶ τὴν ὑπὸ τὴν ἡμιμοίριον ἥτις εὑρίσκεται τῶν
αὐτῶν ō. λα πρώτ. κε δεύτ. ἔγγιστα. ᾗ συναναπληρωθή

Jedes stellenwertige Zahlensystem, so auch das dezimale und das sexagesimale, ist ein tabellarisches Zahlensystem und beruht auf der tabellarischen Idee.

Ptolemaios konnte auf Vorarbeiten seit Apollonios von Perge (um -250) und auf Erkenntnisse der Astronomen aus Babylon und Ägypten zurückgreifen.

Ein allgemein benütztes stellenwertiges Zahlensystem stand in der hellenistischen Welt noch nicht zur Verfügung, jedoch wurde in der Astronomie das Zeichen ō für Null als Ziffer verwendet.

Die quadratischen Tripel mit kleinstem n und kleinem d mit Hervorhebung der Tripel in kleinsten Zahlen.

Erläuterung: Rechtwinklige Dreiecke.

n	d=1			d=2			d=8			d=9			d=18			d=25		
	2n+1			2n+2			4n+8			6n+9			6n+18			10n+25		
1	**3**	**5**	**4**	**4**	**5**	**3**	**12**	**13**	**5**	**15**	**17**	**8**	**24**	**25**	**7**	**35**	**37**	**12**
2	**5**	**13**	**12**	*6*	*10*	*8*	*16*	*20*	*12*	**21**	**29**	**20**	*30*	*34*	*16*	**45**	**53**	**28**
3	**7**	**25**	**24**	**8**	**17**	**15**	**20**	**29**	**21**	*27*	*45*	*36*	*36*	*45*	*27*	**55**	**73**	**48**
4	**9**	**41**	**40**	*10*	*26*	*24*	*24*	*40*	*32*	**33**	**65**	**56**	*42*	*58*	*40*	**65**	**97**	**72**
5	**11**	**61**	**60**	**12**	**37**	**35**	**28**	**53**	**45**	**39**	**89**	**80**	**48**	**73**	**55**	*75*	*125*	*100*
6	**13**	**85**	**84**	*14*	*50*	*48*	*32*	*68*	*60*	*45*	*117*	*108*	*54*	*90*	*72*	**85**	**157**	**132**
7	**15**	**113**	**112**	**16**	**65**	**63**	**36**	**85**	**77**	**51**	**149**	**140**	**60**	**109**	**91**	**95**	**193**	**168**
8	**17**	**145**	**144**	*18*	*82*	*80*	*40*	*104*	*96*	**57**	**185**	**176**	*66*	*130*	*112*	**105**	**233**	**208**
9	**19**	**181**	**180**	**20**	**101**	**99**	**44**	**125**	**117**	*63*	*225*	*216*	*72*	*153*	*135*	**115**	**277**	**252**
10	**21**	**221**	**220**	*22*	*122*	*120*	*48*	*148*	*140*	**69**	**269**	**260**	*78*	*178*	*160*	*125*	*325*	*300*
11	**23**	**265**	**264**	**24**	**145**	**143**	**52**	**173**	**165**	**75**	**317**	**308**	**84**	**205**	**187**	**135**	**377**	**352**
12	**25**	**313**	**312**	*26*	*170*	*168*	*56*	*200*	*192*	*81*	*369*	*360*	*90*	*234*	*216*	**145**	**433**	**408**
13	**27**	**365**	**364**	**28**	**197**	**195**	**60**	**229**	**221**	**87**	**425**	**416**	**96**	**265**	**247**	**155**	**493**	**468**
14	**29**	**421**	**420**	*30*	*226*	*224*	*64*	*260*	*252*	**93**	**485**	**476**	*102*	*298*	*280*	**165**	**557**	**532**
15	**31**	**481**	**480**	**32**	**257**	**255**	**68**	**293**	**285**	*99*	*549*	*540*	*108*	*333*	*315*	*175*	*625*	*600*
16	**33**	**545**	**544**	*34*	*290*	*288*	*72*	*328*	*320*	**105**	**617**	**608**	*114*	*370*	*352*	**185**	**697**	**672**
17	**35**	**613**	**612**	**36**	**325**	**323**	**76**	**365**	**357**	**111**	**689**	**680**	**120**	**409**	**391**	**195**	**773**	**748**
18	**37**	**685**	**684**	*38*	*362*	*360*	*80*	*404*	*396*	*117*	*765*	*756*	*126*	*450*	*432*	**205**	**853**	**828**
19	**39**	**761**	**760**	**40**	**401**	**399**	**84**	**445**	**437**	**123**	**845**	**836**	**132**	**493**	**475**	**215**	**937**	**912**
20	**41**	**841**	**840**	*42*	*442*	*440*	*88*	*488*	*480*	**129**	**929**	**920**	*138*	*538*	*520*	*225*	*1025*	*1000*
21	**43**	**925**	**924**	**44**	**485**	**483**	**92**	**533**	**525**	*135*	*1017*	*1008*	*144*	*585*	*567*	**235**	**1117**	**1092**
22	**45**	**1013**	**1012**	*46*	*530*	*528*	*96*	*580*	*572*	**141**	**1109**	**1100**	*150*	*634*	*616*	**245**	**1213**	**1188**
23	**47**	**1105**	**1104**	**48**	**577**	**575**	**100**	**629**	**621**	**147**	**1205**	**1196**	**156**	**685**	**667**	**255**	**1313**	**1288**
24	**49**	**1201**	**1200**	*50*	*626*	*624*	*104*	*680*	*672*	*153*	*1305*	*1296*	*162*	*738*	*720*	**265**	**1417**	**1392**
25	**51**	**1301**	**1300**	**52**	**677**	**675**	**108**	**733**	**725**	**159**	**1409**	**1400**	**168**	**793**	**775**	*275*	*1525*	*1500*
26	**53**	**1405**	**1404**	*54*	*730*	*728*	*112*	*788*	*780*	**165**	**1517**	**1508**	*174*	*850*	*832*	**285**	**1637**	**1612**

n	d=32			d=49			d=50			d=72			d=81			d=98		
	8n+32			14n+49			10n+50			12n+72			18n+81			14n+98		
1	**40**	**41**	**9**	**63**	**65**	**16**	**60**	**61**	**11**	**84**	**85**	**13**	**99**	**101**	**20**	**112**	**113**	**15**
2	*48*	*52*	*20*	**77**	**85**	**36**	*70*	*74*	*24*	*96*	*100*	*28*	**117**	**125**	**44**	*126*	*130*	*32*
3	**56**	**65**	**33**	**91**	**109**	**60**	**80**	**89**	**39**	*108*	*117*	*45*	*135*	*153*	*72*	**140**	**149**	**51**
4	*64*	*80*	*48*	**105**	**137**	**88**	*90*	*106*	*56*	*120*	*136*	*64*	**153**	**185**	**104**	*154*	*170*	*72*
5	**72**	**97**	**65**	**119**	**169**	**120**	*100*	*125*	*75*	**132**	**157**	**85**	**171**	**221**	**140**	**168**	**193**	**95**
6	*80*	*116*	*84*	**133**	**205**	**156**	*110*	*146*	*96*	*144*	*180*	*108*	*189*	*261*	*180*	*182*	*218*	*120*
7	**88**	**137**	**105**	*147*	*245*	*196*	**120**	**169**	**119**	**156**	**205**	**133**	**207**	**305**	**224**	*196*	*245*	*147*
8	*96*	*160*	*128*	**161**	**289**	**240**	*130*	*194*	*144*	*168*	*232*	*160*	**225**	**353**	**272**	*210*	*274*	*176*
9	**104**	**185**	**153**	**175**	**337**	**288**	**140**	**221**	**171**	*180*	*261*	*189*	*243*	*405*	*324*	**224**	**305**	**207**
10	*112*	*212*	*180*	**189**	**389**	**340**	*150*	*250*	*200*	*192*	*292*	*220*	**261**	**461**	**380**	*238*	*338*	*240*
11	**120**	**241**	**209**	**203**	**445**	**396**	**160**	**281**	**231**	**204**	**325**	**253**	**279**	**521**	**440**	**252**	**373**	**275**
12	*128*	*272*	*240*	**217**	**505**	**456**	*170*	*314*	*264*	*216*	*360*	*288*	*297*	*585*	*504*	*266*	*410*	*312*
13	**136**	**305**	**273**	**231**	**569**	**520**	**180**	**349**	**299**	**228**	**397**	**325**	**315**	**653**	**572**	**280**	**449**	**351**
14	*144*	*340*	*308*	*245*	*637*	*588*	*190*	*386*	*336*	*240*	*436*	*364*	**333**	**725**	**644**	*294*	*490*	*392*
15	**152**	**377**	**345**	**259**	**709**	**660**	*200*	*425*	*375*	*252*	*477*	*405*	*351*	*801*	*720*	**308**	**533**	**435**
16	*160*	*416*	*384*	**273**	**785**	**736**	*210*	*466*	*416*	*264*	*520*	*448*	**369**	**881**	**800**	*322*	*578*	*480*
17	**168**	**457**	**425**	**287**	**865**	**816**	**220**	**509**	**459**	**276**	**565**	**493**	**387**	**965**	**884**	**336**	**625**	**527**
18	*176*	*500*	*468*	**301**	**949**	**900**	*230*	*554*	*504*	*288*	*612*	*540*	*405*	*1053*	*972*	*350*	*674*	*576*
19	**184**	**545**	**513**	**315**	**1037**	**988**	**240**	**601**	**551**	**300**	**661**	**589**	**423**	**1145**	**1064**	**364**	**725**	**627**
20	192	592	560	**329**	**1129**	**1080**	*250*	*650*	*600*	*312*	*712*	*640*	**441**	**1241**	**1160**	*378*	*778*	*680*
21	**200**	**641**	**609**	*343*	*1225*	*1176*	**260**	**701**	**651**	*324*	*765*	*693*	*459*	*1341*	*1260*	*392*	*833*	*735*
22	*208*	*692*	*660*	**357**	**1325**	**1276**	*270*	*754*	*704*	*336*	*820*	*748*	**477**	**1445**	**1364**	*406*	*890*	*792*
23	**216**	**745**	**713**	**371**	**1429**	**1380**	**280**	**809**	**759**	**348**	**877**	**805**	**495**	**1553**	**1472**	**420**	**949**	**851**
24	*224*	*800*	*768*	**385**	**1537**	**1488**	*290*	*866*	*816*	*360*	*936*	*864*	*513*	*1665*	*1584*	*434*	*1010*	*912*
25	**232**	**857**	**825**	**399**	**1649**	**1600**	*300*	*925*	*875*	**372**	**997**	**925**	**531**	**1781**	**1700**	**448**	**1073**	**975**
26	*240*	*916*	*884*	**413**	**1765**	**1716**	*310*	*986*	*936*	*384*	*1060*	*988*	**549**	**1901**	**1820**	*462*	*1138*	*1040*

Die wichtigsten Maßeinheiten der klassischen Antike

zum Gebrauch beim Rechnen mit römischen Zahlen.

Längenmaße

digitus (Fingerbreit)	= /XVI pes	= 1,86 cm
palmus (Handbreit)	= IV digiti	= 7,43 cm
pes (Fuß)	= XVI digiti	= 29,6985 cm
cubitus (Elle)	= I /II pedis	= 44,55 cm
gradus (Halbschritt)	= II /II pedis	= 74,246 cm
passus (Schritt)	= V pedis	= 1,485 m
actus	= XXIV passus	= 35,638 m
mille passus (Meile)	= M passus	= 1484,92 m = VIII stadii
plethrum	= /VI stadium (alexandrinisch)	= 30,935 m

Flächenmaße

pes quadratus (Quadratfuß)	= /CDLXXX actus simplex	= 8,82 dm²
actus simplex	= /LX iugerum	= 42,336 m²
iugerum (Morgen, Tagwerk, Joch, bebaubarer Anteil)	= I actus per II actus	= 25,4 a
centuria (Flur)	= C iugera	= 25,4 ha

Gewichtsmaße (nach einem Mittelwert antiker 10-Pfund Steine des Louvre und des Nationalmuseums Neapel in Übereinstimmung mit dem von Th. Mommsen angegebenen Goldpfund):

talent (= 60 minen)	= LXXX librae	= 26,194 kg
libra (Pfund)	= XII unciae	= 327,43 g
uncia (Unze)	= VI sextans = II semis	= 27,286 g
scrupel (= II obolos)	= /XXIV uncia	= 1,137 g

Hohlmaße (I amphora Wasser wiegt LXXX librae):

amphora (Kubikfuß)	= II urnae = XLVIII sextarii	= 26,194 l
urna (Eimer)	= /II amphora	= 13,1 l
congius (Chus, Krug)	= /IV urna	= 3,27 l
sextarius	= /VI congius	= 0,5457 l
hemina (Kotyle)	= /II sextarius	= 0,273 l
quartarius	= /IV sextarius	= 0,136 l
ciatus (Schnapsglas)	= /III quartarius	= 4,55 cl
modius (für Trockenes)	= XVI sextarii	= 8,731 l
medimnus	= VI modii = XCVI sextarii	= 52,388 l
culeus	= X medimni	= 5,239 hl

Münzen

Münzen wurden anfangs gegossen und, wie gesetzlich vorgeschrieben (C. 10,72,1), gewogen und nur mit gutem Glauben gezählt.

as, ursprünglich I libra Kupfererz, um 486 a.u.c. IV unciae Kupfer, um 702 a.u.c. I uncia Kupfer, zuletzt (lex Papiria 841 a.u.c.)	= /II uncia Kupfer
sestertius, I uncia Messing, (aber: I sestertium = M sestertii)	= II /II asses (später IV asses)
denarius, zuerst /VI, unter Caracalla /VIII, zuletzt /X uncia Silber	= XX asses (zuerst X, später XVI asses)
tetradrachmon, /II uncia Silber (= /XXXII stater in Gold)	= III denarii
aureus, /XL libra, aeit M. Aurelius /XLV libra Gold (= C sestertii)	= XXV denarii
solidus (Dukat) = /VI uncia Gold (gesetzlich Rom 367, C. 10,71,5) = XXIV siliqua zu /X uncia Silber = /V libra Silber, (gesetzlich Constantinopel 397, C. 10,77,1) = 20 librae Kupfer (gesetzlich Mailand 396, C. 10,29,1)	= 4,548 g Gold

Solange die Wertverhältnisse von Gold, Silber und Kupfer nach dem Gewicht, wie sie schließlich gesetzlich festgehalten wurden, verbindlich waren, dienten veränderte Gewichte von Münzen offensichtlich nur der praktischen Handhabung durch die Münzer und im Zahlungsverkehr bei gutem Glauben ohne Wiegen der Münzen eines Zahlbetrages.

Eine Wertänderung von Geld und Handelswaren ergab sich aus veränderten Gewichten der jeweiligen Münzen demnach nicht.
