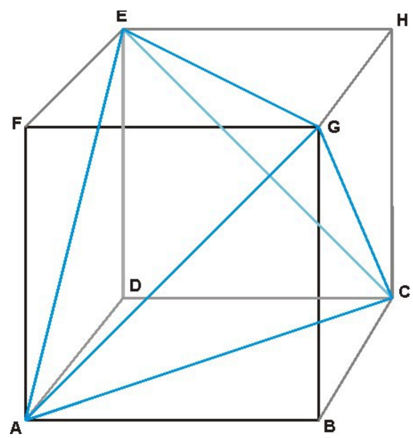
Euklid: Stoicheia

(Die Elemente des Euklid)

Buch XV.

Über eingefügte Hypertextverknüpfungen kann der griechische Text in der Fassung von F. Peyrard aufgerufen werden.

XV.1.
Einem gegebenen Würfel ein Tetraeder einbeschreiben.



Dem gegebenen Würfel ABCDEFGH ist ein Tetraeder einzubeschreiben.

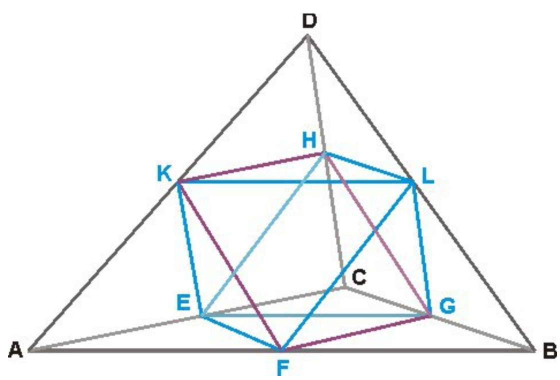
Es sind AC, AE, CE, AG, EG, GC zu ziehen.

Offensichtlich sind die Dreiecke AEC, AGE, AGC, GCE gleichseitig, denn ihre Seiten sind Diagonale gleicher Quadrate.

Damit ist das Tetraeder AECG dem gegebenen Würfel einbeschrieben, denn seine Ecken liegen in der Oberfläche des Würfels, was auszuführen war.

XV.2.
Einem gegebenen Tetraeder ein Oktaeder einbeschreiben.

Dem gegebene Tetraeder ABCD ist ein Oktaeder einzubeschreiben.



Es sind AC, AB, BC, CD, AD, BD in den Punkten E, F, G, H. K, L jeweils in zwei gleiche Teile zu teilen und es sind HE, EK, KF, FL, LG, GH, HK, KL, LH, EF, FG, GE zu ziehen.

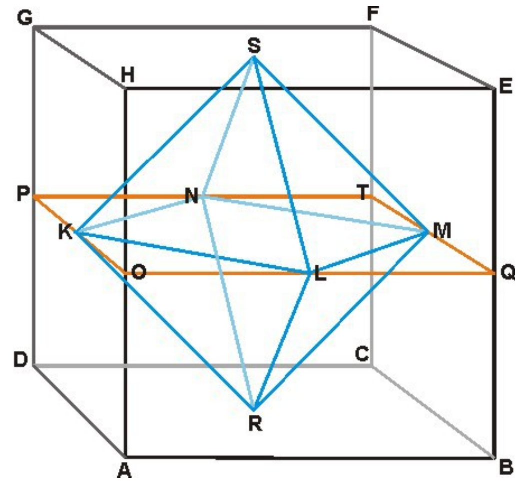
Da AC gleich der doppelten FG und gleich der doppelten KH ist, ist FG der KH gleich und parallel. Aus gleichen Gründen ist zu zeigen, dass KF der HG gleich und parallel und dass HE, EK, KF, FL, LG, GH, HK, KL, LH, EF, FG, GE gleich sind.

Damit sind die Dreiecke, die auf den Seiten des Parallelogramms HKFG errichtet und deren Spitzen L, E sind, gleichseitig und gleich.

Also ist das Oktaeder EHKFGL dem gegebenen Tetraeder einbeschrieben, denn seine Ecken liegen in den Kanten des Tetraeders, was auszuführen war.

XV.3.
Einem gegebenen Würfel ein Oktaeder einbeschreiben.

Wenn ABCDEFGH ein gegebener Würfel ist und K, L, M, N die Mittelpunkte der seinen quadratischen Seitenflächen einbeschriebenen Kreise sind [wie IV.8.], dann sind KL, LM, MN, NK zu ziehen, womit, sage ich, KLMN ein Quadrat ist.



Denn wenn durch K, L, M, N die zu AB, BC, CD, DA parallelen OQ, QT, TP, PO gezogen werden, ist PO gleich der doppelten OK und ist QO gleich der doppelten OL, womit KO gleich OL ist.

Aus den gleichen Gründen ist MQ gleich QL. Damit ist das Quadrat über KL gleich dem doppelten Quadrat über OL. Aus den gleichen Gründen ist das Quadrat über ML gleich dem doppelten Quadrat über LQ.

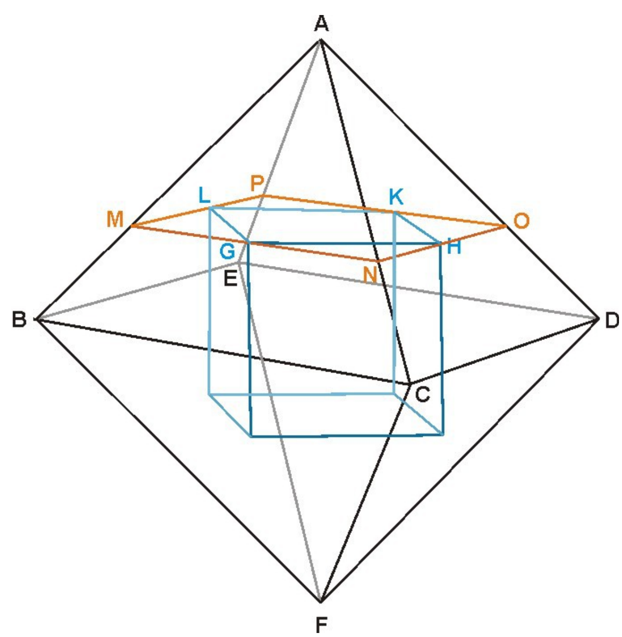
Damit ist das Quadrat über KL gleich dem Quadrat über ML. KLMN ist deshalb gleichseitig und offensichtlich auch rechtwinklig.

Von den Mittelpunkten R, S der den Quadraten BD, EG einbeschriebenen Kreise [wie IV.8.] aus sind RL, RM, RK, RN, SK, SL, SM, SN zu ziehen. Offensichtlich sind die Kanten des so gebildeten Oktaeders gleich, ebenso wie seine dreieckigen Seitenflächen damit gleich sind.

Damit ist das Oktaeder SKLMNR dem gegebenen Würfel einbeschrieben, was auszuführen war.

XV.4.
Einem gegebenen Oktaeder einen Würfel einbeschreiben.

Wenn ABCDEF ein gegebenes Oktaeder und G, H, K, L die Mittelpunkte der den Dreiecken ABC, ACD, ADE, AEB einbeschriebenen Kreise sind [wie IV.4.], dann, sage ich, ist GHKL ein Quadrat.



Es sind durch G, H, K, L die zu BC, CD, DE, EB parallelen MN, NO, OP, PM und dazu GH, HK, KL, LG zu ziehen.

Da das Dreieck ABC gleichseitig ist, teilt die Gerade AG durch den Mittelpunkt G des Kreises, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist, den Winkel an A und das Dreieck AMN in zwei gleiche Teile.

Es ist somit MG gleich NG.
Aus den gleichen Gründen ist NH gleich HO.

Da MN gleich NO ist, ist somit GM gleich NH. Der Winkel MNO ist ein rechter Winkel, also ist offensichtlich GL gleich GH. Aus den gleichen Gründen sind auch GH, HK, KL gleich.

Damit ist GHKL ein Parallelogramm, das vollständig in einer Ebene liegt [wie XI.7.].

Da jeder der Winkel LGM, HGN gleich der Hälfte eines rechten Winkel ist, ist der ergänzende Winkel LGH ein rechter Winkel. Ebenso sind auch die Winkel GHK, HKL, KLG rechte Winkel. Deshalb ist GHKL ein Quadrat.

Ebenso wie in der Pyramide ABCDE die parallelen MN, NO, OP, PM gezogen und LG, GH, HK, KL eingetragen und das Quadrat GHKL errichtet wurde, ist mit den übrigen Pyramiden mit den Spitzen B, C, D, E, F zu verfahren und sind Quadrate zu errichten.

Damit ist in dem gegebenen Oktaeder ein Würfel einbeschrieben, was auszuführen war.

XV.5.

Einem gegebenen Ikosaeder ein Dodekaeder einbeschreiben.

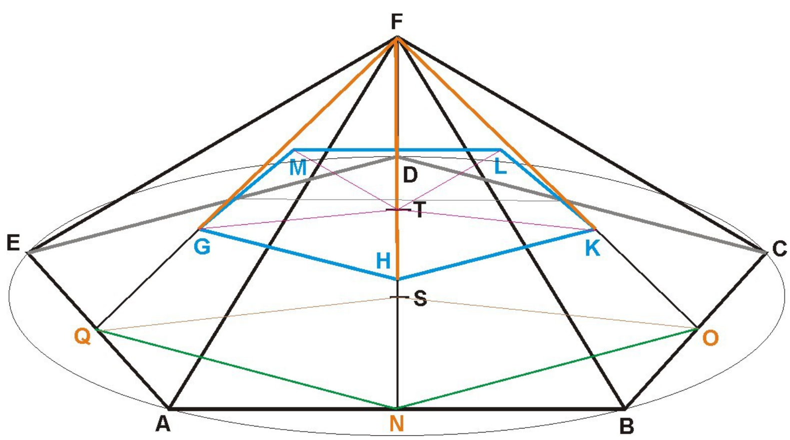
Ist ABCDEF eine der zwölf Pyramiden mit fünfeckiger Grundfläche [wie QRSTVZ in XIII.16.] des Ikosaeders, dann sind den Dreiecken AFE, AFB, BFC, FCD, DFE Kreise [wie IV.4.] mit den Mittelpunkten G, H, K, L, M einzuschreiben. Es sind GH, HK, KL, LM, MG zu ziehen. Es sind FG, FH, FK zu ziehen, bis Q, N, O zu verlängern und NQ, NO einzutragen.

Es werden somit EA, AB, BC in den Punkten Q, N, O in zwei gleiche Teile geteilt.

Da sich NQ zu NO verhält wie GH zu HK ist GH gleich HK.

Auf gleiche Weise ist zu zeigen, dass im Fünfeck GHKLM alle Seiten gleich sind.

Das Fünfeck GHLKM, sage ich, ist gleichwinklig, da NQ, NO den GH, HK parallel sind und gleiche Winkel einschließen [wie XI.10.].



Die Senkrechte im Mittelpunkt S des Kreises, dem das Fünfeck ABCDE einbeschrieben ist, auf der Ebene, in der das Fünfeck liegt, geht durch F und schließt mit den Geraden der Ebene durch N, O, Q rechte Winkel ein.

Die Parallele zu QS durch G schneidet SF und bildet mit SF im Schnittpunkt T einen rechten Winkel. Auch TH, TK, schließen mit SF rechte Winkel ein und sind damit parallel zu NS, OS. Somit liegen TG, TH, TK, TL, TM in einer Ebene.

Es liegt deshalb das Fünfeck GHKLM vollständig in einer Ebene.

Ebenso wie mit der Pyramide ABCDEF ist mit den übrigen elf Pyramiden des Ikosaeders zu verfahren und sind die dem GHKLM gleichen Fünfecke zu errichten. Damit sind zwölf Fünfecke zu errichten, die das Dodekaeder begrenzen.

Also ist ein Dodekaeder einem gegebenen Ikosaeder einbeschrieben, was auszuführen war.

XV. 6.

Die Anzahl der Kanten und Ecken der fünf Polyeder bestimmen.

Das Ikosaeder wird von zwanzig Dreiecken begrenzt. Diese haben insgesamt sechzig Seiten. Da jeweils zwei Seiten eine Kante bilden, ist davon die Hälfte zu nehmen und deshalb hat das Ikosaeder dreißig Kanten.

Es ist also zur Bestimmung der Anzahl der Kanten eines Polyeders die Anzahl aller Seiten aller Seitenflächen zusammen zu nehmen und ist diese zu halbieren.

Da das Dodekaeder von zwölf Fünfecken begrenzt wird, die zusammen sechzig Seiten haben, hat das Dodekaeder damit dreißig Kanten. Auf gleiche Weise sind die Anzahlen der Kanten auch der übrigen Polyeder zu bestimmen.

Um die Anzahl der Ecken eines Polyeders zu bestimmen ist die Anzahl der Ecken aller Seitenflächen zusammen zu nehmen, die den Polyeder begrenzen, und ist diese durch die Anzahl der ebenen Winkel zu teilen, die einen Raumwinkel [wie XI. Erklärung 11.] in der Ecke des Polyeders bilden.

Da das Ikosaeder von zwanzig Dreiecken mit zusammen sechzig Ecken begrenzt wird und der Raumwinkel in einer Ecke des Ikosaeders von fünf ebenen Winkeln gebildet wird, hat somit das Ikosaeder zwölf Ecken.

Da das Dodekaeder von zwölf Fünfecken mit zusammen sechzig Ecken begrenzt wird und der Raumwinkel in der Ecke des Dodekaeders von drei ebenen Winkeln gebildet wird, hat das Dodekaeder zwanzig Ecken. Offensichtlich ist gezeigt, dass auf gleiche Weise auch die Anzahlen der Ecken der übrigen Polyeder zu bestimmen sind, was auszuführen war.

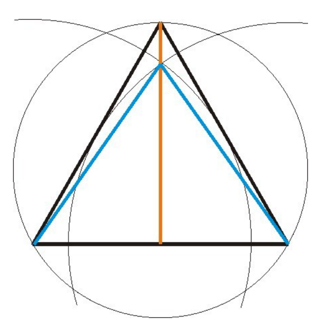
XV.7.

Die Neigungen der Seitenflächen an den Kanten der fünf Polyeder bestimmen.

Beim Würfel bildet eine Seitenfläche mit einer anliegenden offensichtlich einen rechten Winkel.

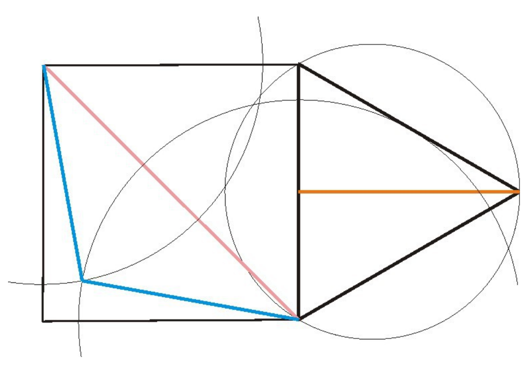
Für das Tetraeder sind um die Endpunkte einer Seite der Dreiecke, die den Tetraeder begrenzen, Kreise mit dem Radius, der gleich der Höhe des Dreiecks ist, zu schlagen.

Die Geraden durch einen Schnittpunkt der Kreise und durch die Mittelpunkte der Kreise schneiden sich dann mit dem Winkel, den eine Seitenfläche des Tetraeders mit einer anliegenden bildet.

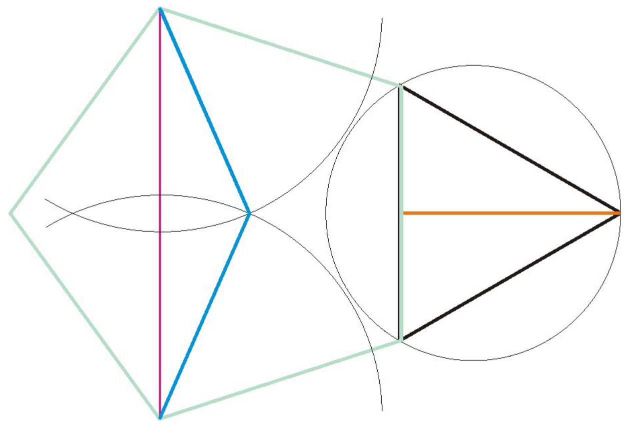


Für das Oktaeder sind um die Endpunkte der Diagonalen des Quadrats über einer Seite der Dreiecke, die das Oktaeder begrenzen, Kreise mit dem Radius, der gleich der Höhe des Dreiecks ist, zu schlagen.

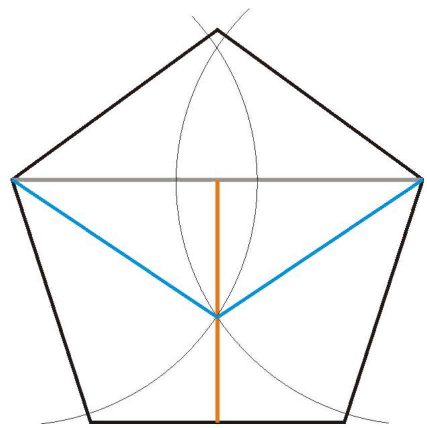
Die Geraden durch einen Schnittpunkt und durch die Mittelpunkte der Kreise schneiden sich dann mit dem Neigungswinkel der Ebenen, in den zwei aneinanderliegende Seitenflächen des Oktaeders liegen.



Für das Ikosaeder ist über einer Seite der Dreiecke, die das Ikosaeder begrenzen, ein gleichseitiges Fünfeck zu errichten und ist eine Gerade durch die Eckpunkte zweier seiner Seiten zu ziehen. Um die Eckpunkte sind mit dem Radius, der gleich der Höhe des Dreiecks ist, Kreise zu schlagen.



Die Geraden durch einen Schnittpunkt und durch die Mittelpunkte der Kreise schneiden sich dann mit dem Neigungswinkel der Ebenen, in denen zwei aneinanderliegende Seitenfläche des Ikosaeders liegen.



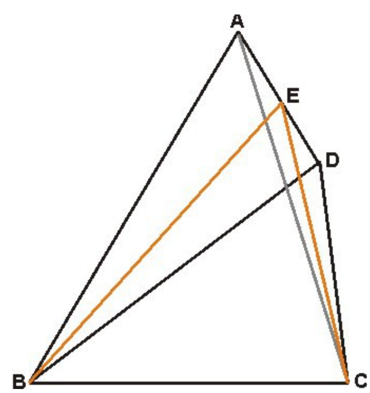
Für das Dodekaeder ist in einem der Fünfecke, die das Dodekaeder begrenzen, eine Gerade durch die Eckpunkte zweier seiner Seiten zu ziehen. Um die Eckpunkte sind mit dem Radius, der gleich der senkrechten Strecke vom Mittelpunkt der Geraden zur gegenüber liegenden Seite ist, Kreise zu schlagen.

Die Geraden durch einen Schnittpunkt und durch die Mittelpunkte der Kreise schneiden sich dann mit dem Neigungswinkel der beiden Ebenen, in denen aneinanderliegende Seitenflächen des Dodekaeders liegen.

Denn ist in einer der vier gleichseitigen Dreiecke ABC, die das Tetraeder ABCD mit der Spitze D begrenzen, die Kante AD in E in die zwei gleichen Teile BE, EC geteilt, dann, da die Dreiecke ADB, ADC gleichseitig sind, sind BE, CE zu AD senkrecht.

Es ist, sage ich, der Winkel BEC ein spitzer Winkel.
Denn da AC gleich der doppelten AE ist, ist das Quadrat über AC gleich dem vierfachen Quadrat über AE. Es ist das Quadrat über AC gleich den Quadraten über AE, EC zusammen [wie I.47.], also verhält sich das Quadrat über AC zum Quadrat über CE wie Vier zu Drei.

Da CE gleich EB ist, ist das Quadrat über BC kleiner als die Quadrate über BE, EC zusammen. Damit ist der Winkel BEC ein spitzer Winkel [wie II.13.]. Die Flächen ABD, ADC schneiden sich in AD, zu der die in den Flächen liegenden BE, EC senkrecht sind und einen spitzen Winkel einschließen. Damit ist der Winkel BEC der Winkel, den die Ebenen bilden [wie XI. Erklärung 6.], in dem die Dreiecke liegen.

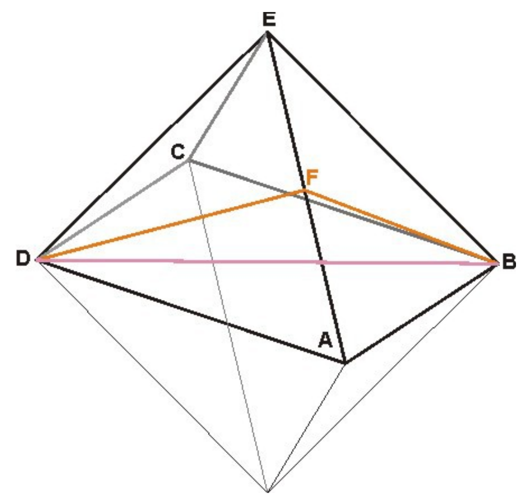


Der Winkel BEC kann wie angegeben bestimmt werden, denn mit der gegebenen Strecke BC können BE, EC bestimmt werden, da sie senkrecht auf der Seite AD gleichwinkliger Dreiecke stehen. Kreise um B, C mit diesem Radius, der gleich der Höhe der Dreiecke ist, schneiden sich und die von B, C zu den Schnittpunkten gezogenen Geraden schließen dann den Neigungswinkel der Ebenen ein, in denen zwei aneinanderliegende Seitenflächen des Tetraeders liegen.

Die Kreise um B, C mit dem Radius BE wenn sie in der Ebene, in der ABC liegt, gezogen werden, schneiden sich offensichtlich, denn Kreise mit dem Radius gleich der halben BC berühren sich und Kreise mit einem Radius kleiner als die halbe BC schneiden und berühren sie sich nicht. Da aber BE, EC größer als die halbe BC sind, schneiden sie sich die Kreise mit diesem Radius.

XV.7b Neigungswinkel am Octaeder

Ist die Pyramide ABCDE mit der Spitze E über dem Quadrat ABCD die Hälfte eines Oktaeders, dann sind die Kanten gleich und die dreieckigen Seitenflächen gleichseitig.



Es ist die Kante AE in F in zwei gleiche Teile zu teilen und es sind BF, DF zu ziehen. BF, DF sind dann gleich und stehen senkrecht auf AE.

Der Winkel BFD, sage ich, ist ein stumpfer Winkel.

Denn wenn BD gezogen wird, ist, da AC ein Quadrat mit der Diagonalen BD ist, das Quadrat über BD gleich dem doppelten Quadrat über DA und es verhält sich, wie im Vorigen, das Quadrat über DA zum Quadrat über DF wie Vier zu Drei. Damit verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über DF wie Acht zu Drei.

Da die DF gleich der FB ist, ist das Quadrat über BD größer als die Quadrate über BF, FD zusammen. Deshalb ist der Winkel BFD ein stumpfer Winkel [wie II.12.].

Da die Dreiecke ABE, ADE die gleiche Seite AE haben, wobei AE Schnittgerade der Ebenen ist, in der ABE, ADE liegen, und die in den Ebenen liegenden BF, DF senkrecht zu AE sind und einen stumpfen Winkel einschließen, ist der Winkel BFD der Neigungswinkel der Ebenen, in denen die Seitenflächen ABE, ADE liegen.

Der Winkel BFD kann wie angegeben bestimmt werden, denn mit den Dreiecken des gegebenen Oktaeders kann die Seite AD und mit seinem Quadrat AC dessen Diagonale BD gegeben werden. BF, DF stehen senkrecht auf Dreieckseiten, womit auch sie mit dem Winkel BFD, den sie bilden, gegeben werden können.

Denn wenn mit dem Radius DF um B, D Kreise geschlagen werden, die in einer Ebene liegen, schneiden sie sich in den Schnittpunkten mit dem Winkel BFD, der damit der Neigungswinkel zweier Ebenen ist, in denen aneinanderliegende Seitenflächen des Oktaeders liegen.

Offensichtlich schneiden sich diese Kreise um B, D, da FD größer als die halbe BD ist, denn es verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über DF wie Acht zu Drei und es verhält sich das Quadrat über BD zum Quadrat über der halben BD wie Vier zu Drei. Also sind BF, BD größer als die halbe BD.

XV.7c Neigungswinkel am Icosaeder

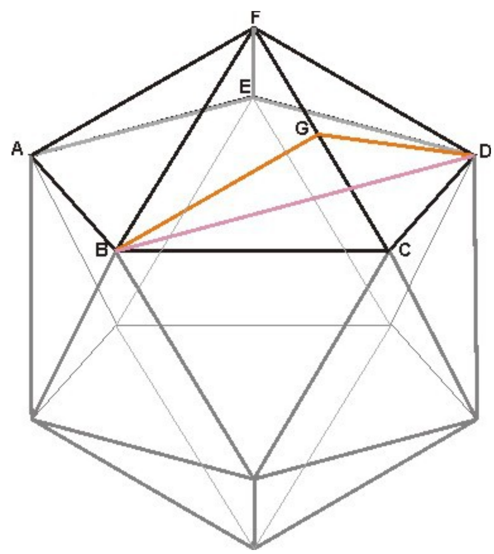
Ist die Pyramide ABCDEF mit dem gleichseitigen Fünfeck ABCDE und der Spitze F Teil eines Ikosaeders, dann sind die dreieckigen Seitenflächen gleichseitig.

Es ist die Kante FC in G in zwei gleiche Teile zu teilen und es sind BG, GD zu ziehen, die dann gleich sind und senkrecht auf CF stehen.

Der Winkel BGD, sage ich, ist ein stumpfer Winkel.
Denn wenn BD unter dem stumpfen Winkel BCD gezogen wird, ist der Winkel BGD größer als der Winkel BCD, da BC, CD zusammen größer als BG, GD zusammen sind [wie I.21.].

Auf die gleiche Weise wie im Vorigen ist zu zeigen, dass der Winkel BGD, der mit den beiden Dreiecken BCF, DCF gefunden wird, auch der Neigungswinkel zweier Ebenen ist, in denen aneinanderliegende Seitenflächen des Ikosaeders liegen.

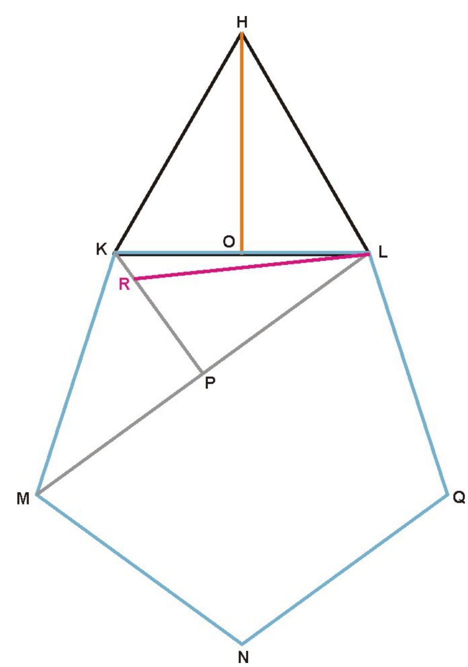
Der Winkel BDG kann bestimmt werden, indem unter zweien der Seiten des Fünfecks, die Seiten der Dreiecke sind, die das Ikosaeder begrenzen, die Strecke BD eintragen wird und BG, GD gezogen werden, die senkrecht auf der gemeinsamen Seite stehen.



Denn wenn um die Endpunkte der Strecke BD mit dem Radius BG Kreise geschlagen werden, schneiden diese sich mit dem Winkel BGD, der damit der Neigungswinkel zweier Ebenen ist, in denen aneinanderliegende Seitenflächen des Ikosaeders liegen.

Wie im Vorigen schneiden sich diese Kreise um B, D, da sowohl BG wie GD größer als die halbe BD sind. Um dies zu zeigen, ist auf einer Seite des gleichseitigen Dreiecks HKL das Fünfeck KMNQL zu errichten und ML zu ziehen.

Auf einer Seite des Dreiecks HKL ist die Senkrechte HO durch H zu errichten.



Die Strecke HO, sage ich, ist dann größer als die halbe ML. Denn wird auf ML die Senkrechte KP durch K errichtet, ist der Winkel KLP größer als ein Drittel eines rechten Winkels, somit ist der Winkel KLP größer als der Winkel KHO.

Es ist der dem Winkel KHO gleiche Winkel PLR anzulegen. Damit ist PL senkrecht zu einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seite RL ist.

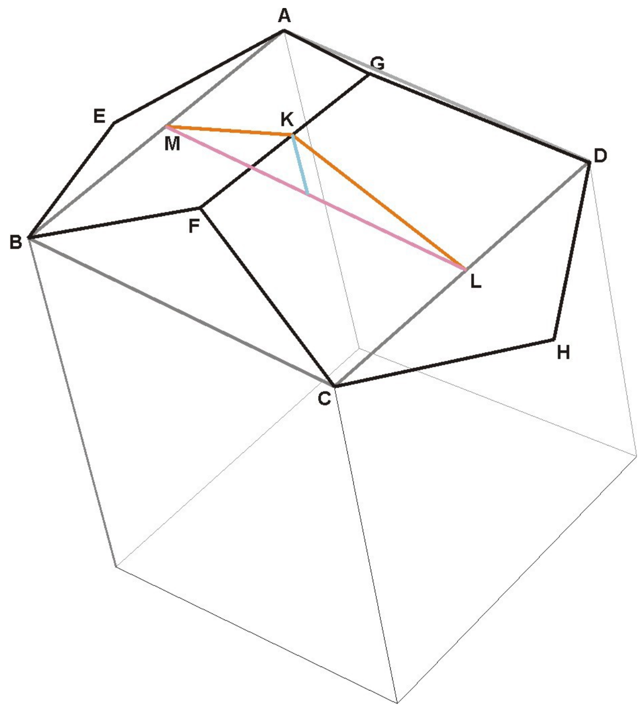
Da sich dann das Quadrat über RL zum Quadrat über LP verhält wie Vier zu Drei und KL größer ist als LR, ist das Verhältnis des Quadrats über KL zum Quadrat über LP größer als Vier zu Drei [wie V.8.].

Da sich auch das Quadrat über KL zum Quadrat über HO verhält wie Vier zu Drei, ist das Verhältnis von KL zu LP größer als KL zu HO [wie V.10.], und somit ist HO größer als LP.

XV.7d **Neigungswinkel am Dodekaeder**

Ist ABCD das Quadrat über dem ein Dodekaeder errichtet ist und sind AEBFG, GDHCF zwei Seitenflächen des Dodekaeders, dann, sage ich, kann ihr Neigungswinkel bestimmt werden.

Es ist FG in K in zwei gleiche Teile zu teilen und es sind auf FG die Senkrechten KL, KM durch L, M in den Ebenen der Seitenflächen zu errichten.



Der Winkel MKL, sage ich, ist ein stumpfer Winkel.

Da, wie bei der Konstruktion des Dodekaeders [wie XIII.17.] gezeigt, die auf der Ebene des Quadrats ABCD errichtete senkrechte Strecke durch K gleich der halben Seite des Fünfecks ist, ist diese kleiner als die halbe ML.

Es ist deshalb ist der Winkel MKL ein stumpfer Winkel, denn wie bei der erwähnten Konstruktion des Dodekaeders ebenfalls gezeigt, ist das Quadrat über KL gleich dem Quadrat über der halben Seite des Würfels zusammen mit dem Quadrat über der Seite des Fünfecks.

KL, KM sind gleich und somit ist jede der beiden größer als die halbe ML.

Der Winkel MKL kann wie angegeben bestimmt werden, denn die beiden Geraden, die den Neigungswinkel der Ebenen bilden, in denen aneinanderliegende Seitenflächen liegen, können gegeben werden.

Denn da die Seite des Quadrats ABCD die Strecke von einer Ecke des Fünfecks zur gegenüber liegenden Ecke ist, und das Fünfeck gegeben ist, kann ML gegeben werden. Damit können auch MK, KL gegeben werden, denn sie sind senkrecht zu FG durch die Mittelpunkte von AB und ihrer Parallelen errichtet.

Um die Geraden zu erhalten, die den Neigungswinkel bilden, sind deshalb um die Endpunkte der ML, die der Kante des Würfels gleich ist, Kreise mit dem Radius KL zu schlagen und sind von diesen Endpunkten Gerade durch einen der Schnittpunkte zu ziehen.

MK, KL schließen dann den Winkel ein, den die beiden Ebenen bilden, in denen nebeneinanderliegende Seitenflächen des Dodekaeders liegen.

Wie im Vorigen gezeigt, schneiden sich die Kreise, da der Radius KL größer als die halbe ML ist, wobei mit den Geraden von den Kreismittelpunkten zu einem ihrer Schnittpunkte der gesuchte Neigungswinkel zu bestimmen ist, was auszuführen war.

Lector. Vale.