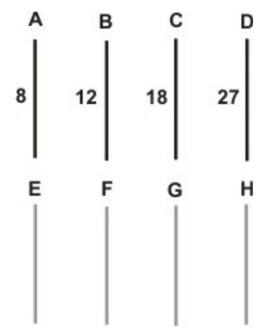
Euklid: Stoicheia (Euklids Elemente)

Buch VIII.

VIII.1.

Stehen mehrere Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und sind die erste und letzte Zahl teilerfremd, dann sind sie die kleinsten unter denen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen.



Wenn die Zahlen A, B, C, D in fortlaufend gleicher Proportion stehen und A und D teilerfremd sind, dann, sage ich, sind die Zahlen A, B, C, D die kleinsten unter denen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen.Denn sind sie dies nicht, dann stehen andere Zahlen E, F, G, H, die kleiner als A, B, C, D sind, im gleichen Verhältnis wie diese, weshalb sich A zu D wie E zu H verhält.

A und D sind teilerfremd und teilerfremde Zahlen sind die kleinsten unter denen, die im gleichen Verhältnis stehen und deren gleiche Teiler sie sind, die kleinere von den kleineren wie die größere von den größeren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern und das Hinterglied von den Hintergliedern. Dann ist E Vielfache von A, die kleinere von der größeren, was nicht möglich ist.
Also sind die Zahlen E, F, G, H, nicht kleiner als A, B, C, D.

Deshalb sind A, B, C, D die kleinsten Zahlen unter denen, die im gleichen Verhältnis stehen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist in $A : B = B : C = C : D$, wobei A, B, C, D natürliche Zahlen sind, A und D teilerfremd,
dann sind A, B, C, D die kleinsten Zahlen, mit denen diese fortlaufende Proportion darstellbar ist .

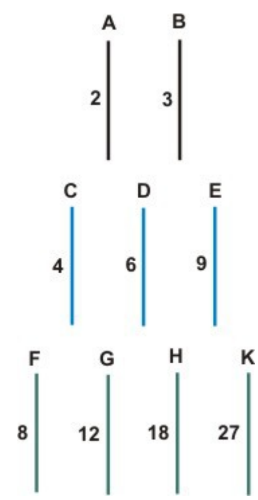
Da $B = A \cdot q$ und $C = B \cdot q$, somit $D = C \cdot q$,
ist $C = A \cdot q^2$
und $D = A \cdot q^3$ und es liegt mit A, B, C, D eine geometrische Folge vor.

VIII.2.
Die kleinsten Zahlen finden, die in einem vorgegebenen Verhältnis stehen.

Ist das Verhältnis in kleinsten Zahlen A zu B gegeben, dann sollen weitere kleinstmögliche Zahlen gefunden werden, die im diesem Verhältnis stehen.

Es sollen nun vier Zahlen gefunden werden, die im gegebenen Verhältnis stehen.
Es sei A mit sich multipliziert C, A multipliziert mit B gleich D, B mit sich multipliziert E,
A multipliziert mit C gleich F, A multipliziert mit D gleich G, A multipliziert mit E gleich H,
B multipliziert mit E gleich K.

Da A mit sich multipliziert C ergibt und A multipliziert mit B gleich D, verhält sich A zu B wie C zu D. Da nun A multipliziert mit B gleich D ist und B multipliziert mit sich E, also A und B mit B multipliziert D und E ergeben, verhält sich A zu B wie D zu E.
Also verhält sich C zu D wie D zu E und diese wie A zu B.
Da A multipliziert mit C gleich F ist, A multipliziert mit D gleich G, verhält sich C zu D wie F zu G. Da sich C zu D wie A zu B verhält, verhält sich F zu G wie A zu B.
Da A multipliziert mit D gleich G ist und A multipliziert mit E gleich H, verhält sich D zu E wie G zu H.
Da sich D zu E verhält wie A zu B, verhält sich G zu H wie A zu B.
Da aber A multipliziert mit E gleich H ist und B multipliziert mit E gleich K, verhält sich H zu K wie A zu B. Also verhalten sich F zu G wie G zu H und wie H zu K und diese wie A zu B.
Die Zahlen C, D, E, so wie F, G, H, K stehen also in Proportion wie A zu B, und, sage ich, sind auch die kleinsten.
Da A und B die kleinsten Zahlen sind, die in ihrem Verhältnis stehen, sind sie teilerfremd.
Da A und B mit sich multipliziert C und E ergeben, diese mit ihnen multipliziert F und K ergeben, sind C und E, sowie F und K teilerfremd.
Es sind Zahlen in Proportion, deren erste und letzte teilerfremd sind, auch die kleinsten, die im gleichen Verhältnis stehen.



Deshalb sind C, D, E, wie auch F, G, H, K die kleinsten Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen wie A und B, was zu zeigen war.

Zusatz: **Offensichtlich sind bei drei kleinsten Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion, die erste und die letzte Zahl die Quadratzahlen des Vorderglieds und des Hinterglieds der Proportion, jedoch bei vier Zahlen die Kubikzahlen.**

Anmerkung:

Mit $B = A \cdot q$, wobei A / B gekürzt, ist die Entwicklung der geometrischen Folge mit dem Faktor q:

$C = A \cdot A = A^2$ $\quad D = A \cdot A \cdot q$ $\quad E = A \cdot A \cdot q \cdot q = (A \cdot q)^2$

$F = A \cdot A \cdot A = A^3$ $\quad G = A \cdot A \cdot A \cdot q$ $\quad H = A \cdot A \cdot A \cdot q \cdot q$ $\quad K = A \cdot A \cdot A \cdot q \cdot q \cdot q = (A \cdot q)^3$

...

Damit sind die gesuchten Zahlen bei gegebenen A und B:

A^2 $\quad A \cdot B$ $\quad B^2$

A^3 $\quad A^2 \cdot B$ $\quad A \cdot B^2$ $\quad B^3$

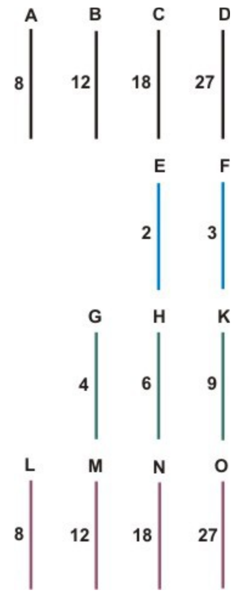
...

Die n-ten Potenzen natürlicher Zahlen bilden mit n-1 eingefügten Zahlen eine geometrische Folge.

VIII.3.

Stehen mehrere Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und sind sie die kleinsten unter denen, die in diesem Verhältnis stehen, dann sind die erste und die letzte Zahl teilerfremd.

Wenn die Zahlen A, B, C, D in fortlaufend gleicher Proportion stehen und sind die kleinsten unter den Zahlen im gleichen Verhältnis, dann, sage ich, sind A und D teilerfremd.



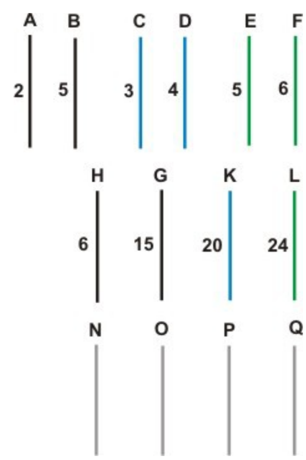
Zu zwei kleinsten Zahlen E und F im gleichen Verhältnis der Zahlen A, B, C, D sind die drei kleinste Zahlen G, H, K im gleichen Verhältnis aufzusuchen und darauf weitere, bis die Anzahl der vorgegebenen Zahlen, A, B, C, D, erreicht ist.
Es seien L, M, N, O diese Zahlen, die in gleichem Verhältnis stehen wie E und F, die als kleinste Zahlen in diesem Verhältnis teilerfremd sind.
Da E mit sich multipliziert G ist, F mit sich multipliziert K ist,
E mit G multipliziert L ist und F mit K multipliziert O ist,
sind G und K und auch L und O teilerfremd.
Da A, B, C, D die kleinsten der Zahlen sind, derer die im gleichen Verhältnis stehen und auch L, M, N, O die kleinsten der Zahlen sind, die im gleichen Verhältnis stehen wie A, B, C, D, auch die Anzahl der Zahlen jeweils gleich ist, deshalb ist A gleich L und D gleich O.

Wie L und O sind deshalb auch A und D teilerfremd, was zu zeigen war.

VIII.4.

Zu den kleinsten Zahlen in mehreren beliebigen Verhältnissen die kleinsten Zahlen finden, die in fortlaufender Proportion in den gegebenen Verhältnissen stehen.

Es seien die Verhältnisse A zu B, C zu D und E zu F in kleinstmöglichen Zahlen gegeben und es sind die kleinsten Zahlen aufzusuchen, die in fortlaufender Proportion in den gegebenen Verhältnissen stehen.



Es sei G das kleinste gemeinsame Vielfache von B und C, auch H gleich oft Vielfache von A wie G von B und auch K gleich oft Vielfache von D wie G von C.
Es ist nun K Vielfache von E oder nicht.

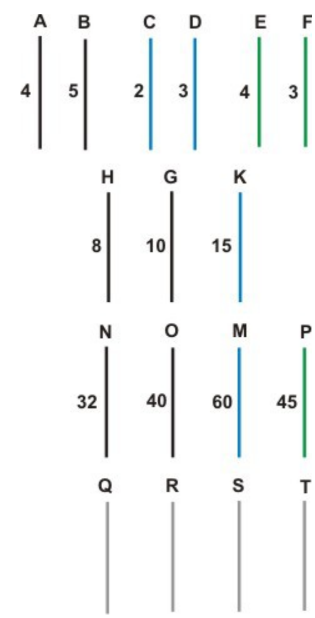
Zunächst sei K Vielfache von E ebenso oft wie L von F.
Da H so oft Vielfache von A ist wie G von B, verhält sich A zu B wie H zu G. Aus den gleichen Gründen verhält sich C zu D wie G zu K und verhält sich auch E zu F wie K zu L.
Deshalb stehen die Zahlen H, G, K, L aufeinander folgend in den Verhältnissen wie A zu B, C zu D und E zu F und sie sind, sage ich, auch die kleinsten. Denn sind nicht H, G, K, L die kleinsten dieser Zahlen, dann stehen kleinere, N, O, P, Q, aufeinander folgend in den Verhältnissen A zu B, C zu D und E zu F. A verhält sich dann zu B wie N zu O.

A und B sind aber die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis und sind Teiler der Zahlen im gleichen Verhältnis, die kleinere von den kleineren, die größere von den größeren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern wie das Hinterglied von den Hintergliedern, weshalb O Vielfache von B und auch von C ist.

Da G das kleinste gemeinsame Vielfache von B und C ist, ist O auch Vielfache von G, die kleinere von der größeren, was nicht möglich ist.
Deshalb stehen keine kleineren Zahlen als H, G, K, L aufeinander folgend in den Verhältnissen wie A zu B, C zu D und E zu F.

Ist nun K nicht Vielfache von E, so sei M das kleinste gemeinsame Vielfache von E und K.
So oft M Vielfache von K ist, so oft sei N Vielfache von H und O Vielfache von G.
Auch sei P so oft Vielfache von F wie M Vielfache ist von E. Es verhält sich dann H zu G wie N zu O und, da sich A zu B verhält wie H zu G, verhält sich A zu B wie N zu O. Aus den gleichen Gründen verhält sich C zu D wie O zu M und verhält sich E zu F wie M zu P.
Also stehen die Zahlen N, O, M, P aufeinander folgend in den Verhältnissen wie A zu B, C zu D und E zu F und sie sind, sage ich, auch die kleinsten.

Denn wenn nicht N, O, M, P die kleinsten dieser Zahlen sind, dann stehen kleinere, Q, R, S, T, aufeinander folgend in den Verhältnissen wie A zu B, C zu D und E zu F.
Es verhält sich dann A zu B wie Q zu R.
A und B sind aber die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis und sind Teiler der Zahlen im gleichen Verhältnis, die kleinere von den kleineren, die größere von den größeren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern wie das Hinterglied von den Hintergliedern, weshalb R Vielfache von B und auch von C ist.



Da G die kleinste gemeinsame Vielfache von B und C ist, ist R auch Vielfache von G. Es verhält sich dann G zu R wie K zu S und S ist dann Vielfache von K und auch von E. Da M das kleinste gemeinsame Vielfache von E und K ist, ist S auch Vielfache von M, die kleinere von der größeren, was nicht möglich ist.
Also stehen keine kleineren Zahlen als N, O, M, P aufeinander folgend in den Verhältnissen wie A zu B, C zu D und E zu F.

Deshalb sind N, O, M, P die kleinsten Zahlen, die in fortlaufender Proportion in den Verhältnissen wie A zu B, C zu D und E zu F stehen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Zu den mit $A : B$, $C : D$, $E : F$ gegebenen Verhältnissen, ist

$N : O : M : P$ mit $A : B = N : O$, $C : D = O : M$, $E : F = M : P$

die dazu gehörende fortlaufende Proportion.

Euklidischer Algorithmus zur Fortsetzung einer fortlaufenden Proportion:

Ein Verhältnis oder eine fortlaufende Proportion $V = A : \dots F$ wird mit einem weiteren Verhältnis $G : H$ fortgesetzt, indem $V \cdot \mathrm{kgV}(F, G) / F$ ins Verhältnis zu $H \cdot \mathrm{kgV}(F, G) / G$ gesetzt wird.

Beispiele:

$4 : 5$ wird mit $2 : 3$ fortgesetzt, wobei $\mathrm{kgV}(5, 2) = 10$, indem $(4 : 5) \cdot 10 / 5$ ins Verhältnis zu $3 \cdot 10 / 2$ gesetzt wird und erhält so $8 : 10 : 15$.

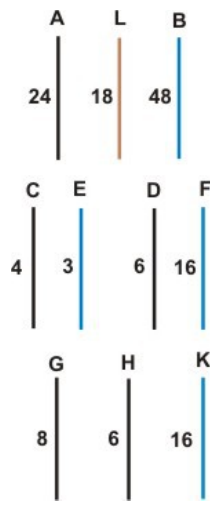
$8 : 10 : 15$ wird mit $4 : 3$ fortgesetzt, wobei $\mathrm{kgV}(15, 4) = 60$, indem $(8 : 10 : 15) \cdot 60 / 15$ ins Verhältnis zu $3 \cdot 60 / 4$ gesetzt wird und erhält so $32 : 40 : 60 : 45$.

VIII.5.

Das Verhältnis zweier Produkte ist gleich den multiplizierten Verhältnissen ihrer Faktoren.

Wenn ein Produkt A die Faktoren C und D hat und ein anderes Produkt B die Faktoren E und F, dann, sage ich, ist das Verhältnis der Produkte A zu B gleich den multiplizierten Verhältnissen der Faktoren, also von C zu E mit D zu F.

Denn sind die zu den beiden Verhältnissen C zu E und D zu F kleinsten Zahlen aufeinander folgend in den gleichen Verhältnissen G, H, K, dann verhält sich C zu E wie G zu H und verhält sich D zu F wie H zu K.



Es sei D multipliziert mit E gleich L. Da D multipliziert mit C gleich A ist, verhält sich C zu E wie A zu L. Aber C verhält sich zu E wie G zu H, deshalb verhält sich G zu H wie A zu L.
Da D multipliziert mit E gleich L ist und F multipliziert mit E gleich B, verhält sich D zu F wie L zu B. Da sich D zu F verhält wie H zu K, verhält sich H zu K wie L zu B.
Da zeigt wurde, dass sich G zu H verhält wie A zu L, verhält sich G zu K wie A zu B und dann auch G zu K wie das Produkt aus den Verhältnissen C zu E mit D zu F.

Deshalb verhält sich A zu B wie das Produkt aus den Verhältnissen C zu E mit D zu F, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Sind die Produkte $A = C \cdot D$ und $B = E \cdot F$
dann stehen die Seiten von A und B in den Verhältnissen $C : E$ und $D : F$.
Zu $C : E$ und $D : F$ sei (Satz VIII.4.) die fortlaufende Proportion $G : H : K$.

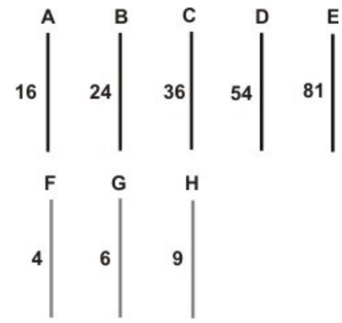
Ist $E \cdot D = L$ und da $D \cdot C = A$ ist $C : E = A : L$ und, da $C : E = G : H$, ist $G : H = A : L$.
da $E \cdot D = L$ und $E \cdot F = B$ ist $D : F = L : B$ und, da $D : F = H : K$, ist $H : K = L : B$
und $G : H : K = A : L : B$
also $G : K = A : B$.
Da $G : K = (C : E) \cdot (D : F)$
ist $A : B = (C : E) \cdot (D : F)$.

VIII.6.

Ist von mehreren Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion die zweite keine Vielfache der ersten, ist keine Zahl Vielfache einer der anderen.

Wenn von Zahlen A, B, C, D, E, in fortlaufend gleicher Proportion, die zweite, B, nicht Vielfache der ersten, A, ist, dann, sage ich, ist keine der Zahlen Vielfache einer der anderen.

Offensichtlich ist keine der Zahlen A, B, C, D, E Vielfache einer der ihr unmittelbar vorhergehenden. Wenn B nicht Vielfache von A ist, dann, sage ich, ist auch keine der anderen Zahlen Vielfache von A.
Ist aber C Vielfache von A und sind die kleinsten Zahlen im gleichen Verhältnis der A, B, C die Zahlen F, G, H, dann stehen auch jeweils die ersten mit den letzten davon im gleichen Verhältnis und es verhält sich A zu C wie F zu H.
Da B nicht Vielfache von A ist, ist auch G nicht Vielfache von F.
F ist aber nicht die Eins, denn jede Zahl ist Vielfache von Eins.
F und H sind teilerfremd. F verhält sich zu H wie A zu C, deshalb ist C nicht Vielfache von A.



Entsprechend kann gezeigt werden, dass dann keine der Zahlen Vielfache einer der anderen ist, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Es ist $B = A \cdot n$, damit $C = A \cdot n^2$, $D = A \cdot n^3$, $E = A \cdot n^4$
und es liegt mit A, B, C, D, E eine geometrische Folge natürlicher Zahlen vor.

Ist n keine natürliche Zahl, dann ist B keine Vielfache von A, folglich auch nicht C, D und E.

Ist eines der Folgenglieder einer geometrischen Folge natürlicher Zahlen nicht Vielfache eines anderen Folgenglieds, ist keines der Folgenglieder Vielfache eines anderen Folgenglieds.

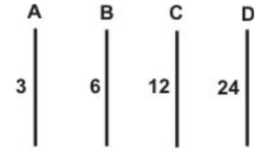
VIII.7.

Ist von mehreren Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion die letzte Zahl Vielfache der ersten, dann ist auch die zweite Zahl Vielfache der ersten.

Wenn von Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion, A, B, C, D, die letzte Zahl, D, Vielfache der ersten, A, ist, dann, sage ich, ist auch B Vielfache von A.

Denn wenn B nicht Vielfache von A ist, ist keine Zahl Vielfache einer der anderen. Diesem widersprechend ist B Vielfache von A.

Deshalb ist B Vielfache von A, was zu zeigen war.



Anmerkung:

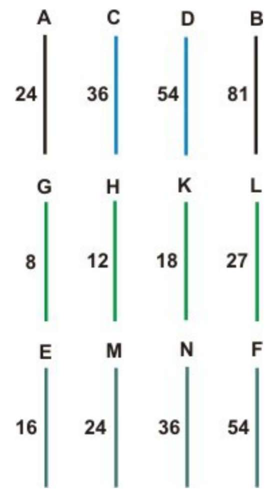
Ist A, B, C, D eine geometrische Folge natürlicher Zahlen,
dann ist $B = A \cdot q$ und $C = A \cdot q^2$, $D = A \cdot q^3$.
Wäre q keine natürliche Zahl, dann (Satz VIII.6.) wäre auch D keine natürliche Zahl.
Da D eine natürliche Zahl ist, muss q eine natürliche Zahl sein und B Vielfache von A.

Ist in einer geometrischen Folge natürlicher Zahlen, das letzte Folgenglied Vielfache des ersten, dann sind alle Folgenglieder Vielfache des ersten.

VIII.8.
Können zwei Zahlen durch Einfügen weiterer Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann können ebenso viele Zahlen zwischen zwei andere Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen, eingefügt und zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

Wenn zwei Zahlen A und B durch Einfügen zweier Zahlen C und D zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden können und die Zahlen E und F im gleichen Verhältnis stehen wie A und B, dann, sage ich, so wie A und B mit den eingefügten Zahlen, so stehen auch E und F mit ebenso vielen eingefügten Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion.

Denn sind zu den Zahlen A, C, D, B die kleinsten Zahlen im gleichen Verhältnis die Zahlen G, H, K, L, dann sind G und L teilerfremd.
Es verhält sich dann A zu B wie G zu L und weil sich A zu B verhält wie E zu F, verhält sich auch G zu L wie E zu F.
Da G und L teilerfremd sind und die kleinsten Zahlen unter denen im gleichen Verhältnis, sind sie Teiler der Zahlen im gleichen Verhältnis, die kleinere von den kleineren, die größere von den größeren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern wie das Hinterglied von den Hintergliedern und deshalb ist E so oft Vielfache von G wie F von L.
Ebenso oft sei nun M ebenso oft Vielfache von H und N ebenso oft Vielfache von K.
Es sind dann E, M, N, F gleich oft Vielfache von G, H, K, L.
Da dann E, M, N, F im gleichen Verhältnis stehen wie G, H, K, L, stehen sie auch im gleichen Verhältnis wie A, B, C, D.



Deshalb können so wie A und B auch E und F durch Einfügen gleich vieler Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, was zu zeigen war.

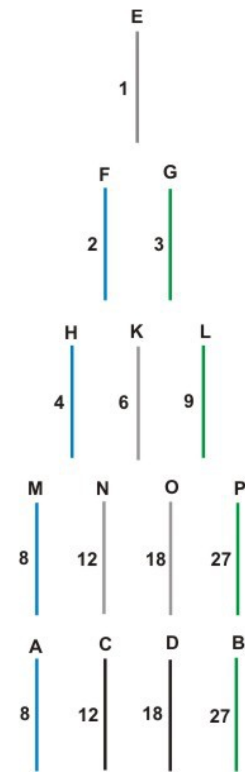
Anmerkung:

Ist gegeben $A : B = E : F$, $A : C : D : B = G : H : K : L$, G / L gekürzt,
dann $E : F = G : L$ und es gibt ein n (Satz VII.22.), so dass $G \cdot n = E$ und $L \cdot n = F$.
Ist $H \cdot n = M$ und $K \cdot n = N$, dann $E : M : N : F = G : H : K : L = A : C : D : B$

Können zwei Zahlen zu einer geometrischen Folge ergänzt werden, dann können auch Zahlenpaare, die zu ihnen in Proportion stehen, zu einer gleich langen geometrischen Folge ergänzt werden .

VIII.9.
Können zwei teilerfremde Zahlen durch Einfügen weiterer Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann kann mit ebenso vielen Zahlen die Eins und jede der beiden Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

Wenn zwei teilerfremde Zahlen A und B durch Einfügen zweier Zahlen C und D zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden können und E die Eins ist, dann, sage ich, mit so vielen Zahlen wie A und B zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden kann, mit ebenso viele Zahlen können jeweils A, B und E zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.



Denn nimmt man zu den Zahlen A, C, D, B die zwei kleinsten Zahlen im gleichen Verhältnis F und G und daraus die drei kleinsten Zahlen H, K, L und daraus weitere bis man schließlich so viele Zahlen wie in A, C, D, B erhält, nämlich M, N, O, P, dann ist F multipliziert mit sich gleich H,
F multipliziert mit H gleich M, G multipliziert mit sich gleich L und G multipliziert mit L gleich P.

Da dann M, N, O, P wie auch A, C, D, B die kleinsten Zahlen im Verhältnis wie F zu G sind und die einen und die anderen die gleiche Anzahl haben, ist jede einzelne je einer der andern gleich, also ist M gleich A und P gleich B.
Da F multipliziert mit sich gleich H ist, verhält sich E zu F wie F zu H.
Da F multipliziert mit H gleich M ist, verhält sich E zu F wie H zu M.
Da gezeigt wurde, dass sich E zu F verhält wie F zu H, verhält sich dann
E zu F wie F zu H und wie H zu M. M aber ist gleich A,
also stehen E, F, H, A in einer fortgesetzt gleichen Proportion.

Aus den gleichen Gründen verhält sich E zu G wie G zu L und wie L zu B und es stehen auch E, G, L, B in einer fortgesetzt gleichen Proportion.

Deshalb können A und Eins und auch B und Eins durch ebenso viele Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden wie A und B, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Gegeben $A : C : D : B$, wobei A / B gekürzt, $E = 1$.
Ist $A : C = F : G$, wobei F / G gekürzt,
dann gibt es zu $F : G$ (Satz VIII.2.) die geometrischen Reihen $H : K : L$ und $M : N : O : P$,
dadurch ist $F \cdot F = H$, $F \cdot H = M$, $G \cdot G = L$, $G \cdot L = P$.
Da auch M / P gekürzt, ist $A = M$ und $B = P$.

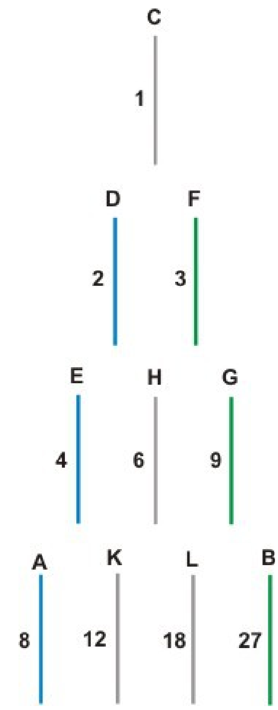
Da $E : F = F : H$ und $F : H = H : M$ ist $E : F : H : M = 1 : F : H : A$.
Da $E : G = G : L$ und $G : L = L : P$ ist $E : G : L : P = 1 : G : L : B$.

VIII.10.

Kann jede von zwei Zahlen und die Eins durch Einfügen weiterer Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann können die beiden Zahlen durch Einfügen ebenso vieler Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

Wenn die beiden Zahlen A und B und die Eins, die C sei, mit D, E und mit F, G zu fortlaufend gleichen Proportionen ergänzt werden können, dann, sage ich, können A und B mit ebenso vielen Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

Denn ist D multipliziert mit F gleich H, D multipliziert H gleich K, und F multipliziert mit H gleich L und verhält sich C zu D wie D zu E, dann ist D so oft Vielfache von C wie E von D.



E ergibt sich deshalb aus D multipliziert mit sich.

Da sich C zu D verhält wie E zu A, ist D so oft Vielfache von C wie A von E und es ergibt sich A aus D multipliziert mit E.

Aus den gleichen Gründen ist F multipliziert mit sich gleich G und F multipliziert mit G gleich B. Da D multipliziert mit sich gleich E und D multipliziert mit F gleich H, verhält sich D zu F wie E zu H.

Aus den gleichen Gründen verhält sich D zu F wie H zu G, deshalb auch E zu H wie H zu G.

Da nun D multipliziert mit E gleich A und D multipliziert mit H gleich K ist, verhält sich E zu H wie A zu K.

Da sich E zu H verhält wie D zu F, verhält sich D zu F wie A zu K.

Da D multipliziert mit H gleich K und F multipliziert mit H gleich L ist, verhält sich D zu F wie K zu L. Da sich D zu F verhält wie A zu K, verhält sich A zu K wie K zu L.

Da F multipliziert mit H gleich L und F multipliziert mit G gleich B ist, verhält sich H zu G wie L zu B. Da sich H zu G verhält wie D zu F, verhält sich D zu F wie L zu B.

Da, wie gezeigt, dass sich D zu F verhält wie A zu K und K zu L, verhält sich auch A zu K wie K zu L und wie L zu B,
womit A, K, L, B in fortlaufend gleicher Proportion stehen.

Deshalb können mit ebenso viel Zahlen wie A und B mit der Eins zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden können, auch A und B zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

Anmerkung:

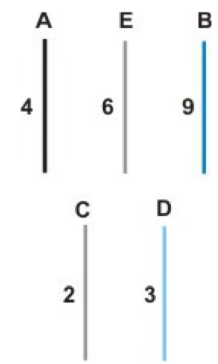
Sind 1 : D : E : A und 1 : F : G : B fortlaufend gleiche Proportionen natürlicher Zahlen, dann können A und B mit dem Euklidischen Algorithmus zur Fortsetzung einer fortlaufenden Proportion zu den geometrischen Folgen E, H, G und A, K, L, B ergänzt werden.

VIII.11.

Zwischen zwei Quadratzahlen kann eine Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt werden, und es verhalten sich die Quadratzahlen wie das mit sich multiplizierte Verhältnis der Grundzahlen.

Wenn zu zwei Quadratzahlen A und B die Grundzahlen C und D sind, dann, sage ich, kann zwischen A und B eine Zahl E zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt werden und auch, dass sich A zu B verhält wie das mit sich multiplizierte Verhältnis von C und D.

Denn wenn C multipliziert mit D gleich E, C multipliziert mit sich gleich A und D multipliziert mit sich gleich B ist, dann verhält sich C zu D wie A zu E, auch verhält sich C zu D wie E zu B. Da sich A zu E verhält wie E zu B, ist zwischen A und B eine Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt.



Dann, sage ich, verhält sich A zu B wie das das mit sich multiplizierte Verhältnis von C und D. Denn da A, E, B in fortlaufend gleicher Proportion stehen, verhält sich A zu B wie das mit sich multiplizierte Verhältnis von A und E. Da sich A zu E verhält wie C zu D, verhält sich A zu B wie das mit sich multiplizierte Verhältnis von C und D.
Deshalb verhalten sich zwei Quadratzahlen wie das mit sich multiplizierte Verhältnis der Grundzahlen, was zu zeigen war.

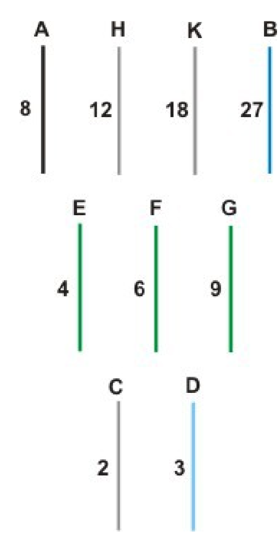
Anmerkung: $C^2 : D^2 = (C : D)^2$

VIII.12.

Zwischen zwei Kubikzahlen können zwei Zahlen zu einer fortlaufenden Proportion eingefügt werden, und es verhalten sich die Kubikzahlen wie das dreimal als Faktor genommene Verhältnis der Grundzahlen.

Wenn zu zwei Kubikzahlen A und B die Grundzahlen C und D sind, dann, sage ich, können zwischen A und B zwei Zahlen im Verhältnis von C und D zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt werden und auch, dass sich A zu B verhält wie das dreimal als Faktor genommene Verhältnis von C und D.

Denn wenn C multipliziert mit sich gleich E ist, C mit D multipliziert gleich F, D mit sich multipliziert gleich G, C mit F multipliziert gleich H, D multipliziert mit F gleich K ist, dann ist, da A eine Kubikzahl und C multipliziert mit sich gleich E ist, C multipliziert mit E gleich A.
Aus den gleichen Gründen ist D multipliziert mit G gleich B.



Da C multipliziert mit sich gleich E und C multipliziert mit D gleich F ist, verhält sich C zu D wie E zu F. Aus den gleichen Gründen verhält sich C zu D wie F zu G. Da C multipliziert mit E gleich A und C multipliziert mit F gleich H ist, verhält sich E zu F wie A zu H.
Da E zu F sich verhält wie C zu D, verhält sich C zu D wie A zu H.

Da aber C multipliziert mit F gleich H und D multipliziert mit F gleich K ist, verhält sich C zu D wie H zu K. Da D multipliziert mit F gleich K ist und D multipliziert mit G gleich B, verhält sich F zu G wie K zu B. Da F zu G sich verhält wie C zu D, verhält sich C zu D wie A zu H, wie H zu K und wie K zu B.

Zwischen A und B sind deshalb H und K zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt.

Dann, sage ich, verhält sich A zu B wie das dreimal als Faktor genommene Verhältnis von C und D. Denn da A, H, K, B in fortlaufend gleicher Proportion stehen, verhält sich A zu B wie das dreimal als Faktor genommene Verhältnis von A und H. Da sich A zu H verhält wie C zu D, verhält sich A zu B wie das dreimal als Faktor genommene Verhältnis von C und D.

Deshalb verhalten sich zwei Kubikzahlen wie das dreimal als Faktor genommene Verhältnis der Grundzahlen, was zu zeigen war.

Anmerkung:

$C^3 : D^3 = (C : D)^3$

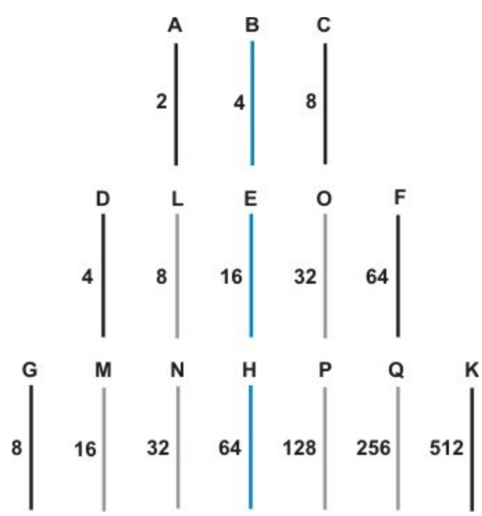
Bei beliebiger Fortsetzung des Verfahrens in VIII.11, VIII.12 gilt für alle natürlichen Zahlen n:
$C^n : D^n = (C : D)^n$.

VIII.13.

Werden mehrere Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion mit sich selbst multipliziert, stehen die Produkte gleichfalls in fortlaufend gleicher Proportion, werden diese mit den Anfangszahlen nochmals multipliziert, dann ebenfalls und auch dann, wenn dies wiederholt wird.

Wenn Zahlen A, B, C in fortlaufend gleicher Proportion stehen, dann verhält sich A zu B wie B zu C. Ist A multipliziert mit sich gleich D, B multipliziert mit sich gleich E, C multipliziert mit sich gleich F, A multipliziert mit D gleich G, B multipliziert mit E gleich H und C multipliziert mit F gleich K, dann, sage ich, stehen sowohl die Zahlen D, E, F wie auch G, H, K in fortlaufend gleicher Proportion.

Denn wenn A multipliziert mit B gleich L, A multipliziert mit L gleich M, B multipliziert mit L gleich N, B multipliziert mit C gleich O, B multipliziert mit O gleich P und C multipliziert mit O gleich Q ist, dann stehen aus den gleichen Gründen, wie bereits gezeigt, D, L, E und G, M, N, H in fortlaufend gleicher Proportion mit dem gleichen Verhältnis unter sich wie A und B, so wie auch E, O, F und H, P, Q, K in fortlaufend gleicher Proportion und im gleichen Verhältnis unter sich wie B und C stehen.



Da sich A zu B verhält wie B zu C stehen D, L, E und E, O, F unter sich im gleichen Verhältnis und ebenso G, M, N, H und H, P, Q, K.

Die gleichen Vielfachen der D, L, E sind dann gleich den gleichen Vielfachen der E, O, F und ebenso sind die gleichen Vielfachen der G, M, N, H den gleichen Vielfachen der H, P, Q, K gleich.

Deshalb verhält sich D zu E wie E zu F und G zu H wie H zu K, was zu zeigen war.

Anmerkung:

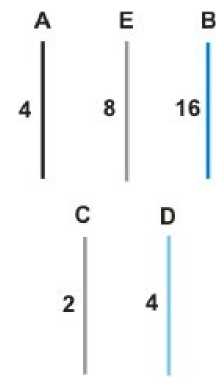
Gleiche Potenzen der Zahlen einer geometrischen Folge bilden eine geometrische Folge.

VIII.14.

Ist eine Quadratzahl Teiler einer anderen Quadratzahl, dann ist auch die Grundzahl der einen Quadratzahl Teiler der anderen und ist eine Grundzahl Teiler einer anderen, so sind es auch ihre Quadratzahlen.

Wenn von zwei Quadratzahlen A und B die eine ein Teiler der anderen ist und C und D ihre Grundzahlen sind, dann, sage ich, ist auch C ein Teiler von D.

Denn ist C multipliziert mit D gleich E, dann stehen A, E, B in fortlaufend gleicher Proportion im Verhältnis wie C und D. Da A Teiler von B ist, ist deshalb A auch Teiler von E und es verhält sich A zu E wie C zu D. Deshalb ist C Teiler von D.



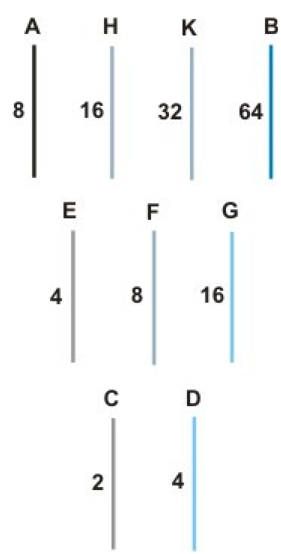
Ist nun C Teiler von D, dann, sage ich, ist auch A Teiler von B.
Da A, E, B in fortlaufend gleicher Proportion stehen im Verhältnis C zu D, da sich C zu D verhält wie A zu E und da C Teiler von D ist, deshalb ist
ist
A Teiler von E. Da aber A, E, B in fortlaufend gleicher Proportion stehen ist auch A Teiler von B.

Deshalb ist von den Grundzahlen zweier Quadratzahlen die eine Grundzahl Teiler der anderen, wenn von den Quadratzahlen die eine Teiler der anderen ist und es ist von den Quadratzahlen eine Teiler der anderen, wenn von den Grundzahlen eine Teiler der anderen ist, was zu zeigen war.

VIII.15.

Ist eine Kubikzahl Teiler einer anderen Kubikzahl, dann ist auch die Grundzahl der einen Teiler der anderen und ist eine Grundzahl Teiler einer anderen, so sind es auch ihre Kubikzahlen.

Wenn eine Kubikzahl A Teiler einer anderen B ist und C und D sind ihre Grundzahlen, dann, sage ich, C ist auch Teiler von D.Denn ist C multipliziert mit sich gleich E, C multipliziert mit D gleich F, D multipliziert mit sich gleich G, C multipliziert mit F gleich H und



D multipliziert mit F gleich K, dann stehen offensichtlich E, F, G und auch A, H, K, B in fortlaufend gleicher Proportion im Verhältnis C zu D. Da A Teiler von B ist, ist A auch Teiler von H und es

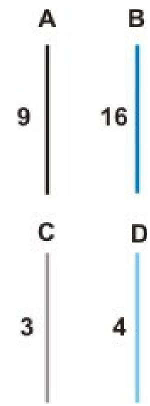
verhält sich A zu H wie C zu D. Deshalb ist C Teiler von D.
Ist nun C Teiler von D, dann, sage ich, ist auch A Teiler von B.
Denn durch ähnliches Vorgehen kann gezeigt werden, dass A, H, K, B in fortlaufend gleicher Proportion und im Verhältnis wie C und D stehen. Da C Teiler von D ist, verhält sich C zu D wie A zu H, also ist A Teiler von H.

Deshalb ist A auch Teiler von B, was zu zeigen war.

VIII.16.

Sind zwei Quadratzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Grundzahlen und sind zwei Grundzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Quadratzahlen.

Wenn C und D die Grundzahlen der Quadratzahlen A und B sind und A und B sind teilerfremd, dann, sage ich, sind auch C und D teilerfremd.



Denn ist C Teiler von D, dann ist auch A Teiler von B.
Da aber A nicht Teiler von B ist, ist C auch nicht Teiler von D.
Ist aber C nicht Teiler von D, dann, sage ich, ist A auch nicht Teiler von B. Denn ist A Teiler von B, dann ist auch C Teiler von D.

Da aber C nicht Teiler von D ist, ist A auch nicht Teiler von B, was zu zeigen war.

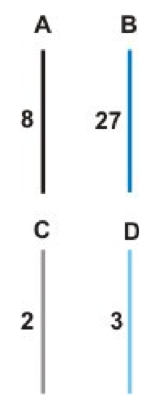
Anmerkung:

Ist C^2 / D^2 gekürzt, dann ist C / D gekürzt und umgekehrt.

VIII.17.

Sind zwei Kubikzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Grundzahlen und sind zwei Grundzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Kubikzahlen.

Wenn C und D die Grundzahlen der Kubikzahlen A und B sind und A und B sind teilerfremd, dann, sage ich, sind auch C und D teilerfremd.



Denn ist C Teiler von D, dann ist auch A Teiler von B.
Da aber A nicht Teiler von B ist, ist C auch nicht Teiler von D.

Da C nicht Teiler von D ist, sage ich, ist A auch nicht Teiler von B.
Denn ist A Teiler von B, dann ist auch C Teiler von D.

Da aber C nicht Teiler von D ist, ist A auch nicht Teiler von B, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist C^3 / D^3 gekürzt, dann ist C / D gekürzt und umgekehrt.

Bei beliebiger Fortsetzung des Verfahrens in VIII.16, VIII.17 gilt für alle natürlichen Zahlen k:
Ist C^k / D^k gekürzt, dann ist C / D gekürzt und umgekehrt.

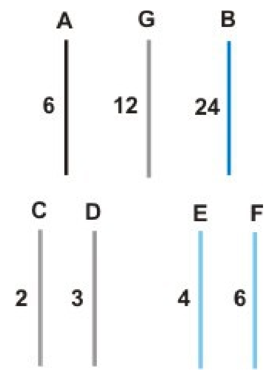
VIII.18.

Ähnliche Produkte können mit einer eingefügten Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden und ihr Verhältnis ist gleich dem der Quadratzahlen der Faktoren im gleichen Verhältnis.

Von zwei ähnlichen Produkten A und B, habe A die Faktoren C und D und B die Faktoren E und F. Da A und B zwei ähnliche Produkte sind, stehen ihre Faktoren in Proportion, also verhält sich C zu D wie E zu F.

Dann, sage ich, kann zwischen A und B eine Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt werden und es verhält sich A zu B wie die Quadratzahlen von C und E und auch wie die Quadratzahlen von D und F.

Denn, da sich C zu D verhält wie E zu F, verhält sich nach Umordnung C zu E wie D zu F.
Der Produkt A ergibt sich aus C multipliziert mit D,
das Produkt B aus E multipliziert mit F.
Ist nun D multipliziert mit E gleich G und da D multipliziert mit C gleich A ist,
verhält sich C zu E wie A zu G. Da sich C zu E verhält wie D zu F,
verhält sich D zu F wie A zu G.
Da nun E multipliziert mit D gleich G ist und
E multipliziert mit F gleich B, verhält sich D zu F wie G zu B.
Da, wie gezeigt, D zu F sich verhält wie A zu G,
verhält sich A zu G wie G zu B.
Damit wurde zwischen A und B eine mittlere Proportionalzahl eingefügt und es stehen A, G, B in einer fortlaufend gleicher Proportion.



Dann, sage ich, verhält sich A zu B wie die Quadratzahlen von C und E und auch wie die Quadratzahlen von D und F.

Da A, G, B in fortlaufend gleicher Proportion stehen, verhält sich A zu B wie die Quadratzahl von A und die Quadratzahl von G. Da sich A zu G verhält wie C zu E und wie D zu F, verhält sich A zu B wie die Quadratzahl von C zur Quadratzahl von E und auch wie die Quadratzahl von D zur Quadratzahl von F, was zu zeigen war.

Anmerkung:

$A = C \cdot D$, $B = E \cdot F$ wobei wegen Ähnlichkeit der Produkte $C : D = E : F$.

Da $C : D = E : F$ ist $C : E = D : F$
Ist $D \cdot C = A$ und ist $D \cdot E = G$, dann ist $D : F = A : G$

Da $D \cdot E = G$ und $E \cdot F = B$ ist $D : F = G : B$. Da $A : G = G : B$ ist $A : G : B$.

Da $A : B = A^2 : G^2$
und $A : G = C : E = D : F$ ist $A : B = C^2 : E^2 = D^2 : F^2$

somit $(C \cdot D) : (E \cdot F) = C^2 : E^2 = D^2 : F^2$.

VIII.19.

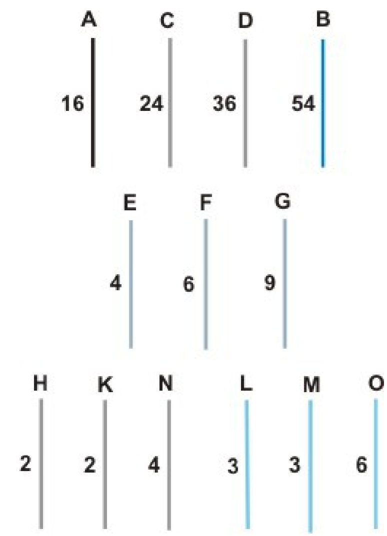
Ähnliche Produkte dreier Faktoren können mit zwei eingefügten Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden und ihr Verhältnis ist wie das der Kubikzahlen der Faktoren im gleichen Verhältnis.

Von zwei ähnlichen Produkten A und B, habe A die Faktoren C, D, E und B die Faktoren F, G, H. Da A und B zwei ähnliche Produkte sind, stehen ihre Faktoren in Proportion, also verhält sich C zu D wie F zu G und D zu E wie G zu H.

Dann, sage ich, können A und B mit zwei eingefügten Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden und es verhält sich A zu B wie die Kubikzahlen von C und F, von D und G und von E und H.

Denn, ist C multipliziert mit D gleich K und F multipliziert mit G gleich L,
dann verhält sich C zu D wie F zu G.
Also sind K und L ähnliche Produkte zweier Faktoren, in die zu fortlaufend gleicher Proportion eine Zahl eingefügt werden kann; diese sei M und sie ergibt sich aus D multipliziert mit F. Da D multipliziert mit C gleich K und D multipliziert mit F gleich M ist, verhält sich C zu F wie K zu M. K zu M verhält sich deshalb wie M zu L.

Also stehen K, M, L in fortlaufend gleicher Proportion im Verhältnis wie C zu F.
Da C zu D sich verhält wie F zu G, verhält sich C zu F wie D zu G.
Aus den gleichen Gründen verhält sich D zu G wie E zu H. Also stehen K, M, L in den Verhältnissen C zu F, D zu G und E zu H.



Da A ein Produkt ist mit den Faktoren C, D, E, ist C multipliziert mit D multipliziert mit E gleich A. Es ist C multipliziert mit D gleich K, deshalb ist E multipliziert mit K gleich A.
Ist E multipliziert mit M gleich N und H multipliziert mit M gleich O, dann ist aus den gleichen Gründen
H multipliziert mit L gleich B.
Da E multipliziert mit K gleich A und
E multipliziert mit M gleich N ist, verhält sich K zu M wie A zu N. Deshalb verhält sich K zu M wie C zu F,
wie D zu G, wie E zu H und wie A zu N.
Da nun E multipliziert mit M gleich N und H multipliziert mit M gleich O ist, verhält sich E zu H wie N zu O, also verhält sich E zu H wie C zu F, wie D zu G, wie E zu H, wie A zu N und wie N zu O.
Da H multipliziert mit M gleich O und H multipliziert mit L gleich B ist, verhält sich M zu L wie O zu B. Also verhält sich
M zu L wie C zu F, wie D zu G, wie E zu H, wie A zu N, wie N zu O und wie O zu B.
Es stehen dann A, N, O, B in fortlaufend gleicher Proportion.

Es verhält sich dann, sage ich, A zu B wie die Kubikzahlen von C und F, von D und G und von E und H.
Da A, N, O, B in fortlaufend gleicher Proportion stehen, verhält sich A zu B wie die Kubikzahl von A zur Kubikzahl von N. Da sich A zu N verhält wie C zu F, wie D zu G und wie E zu H, was gezeigt wurde, verhält sich A zu B wie die Kubikzahl von C zur Kubikzahl von F, wie die Kubikzahl von D zur Kubikzahl von G und wie die Kubikzahl von E zur Kubikzahl von H, was zu zeigen war.

Anmerkung:

$A = C \cdot D \cdot E$, $B = F \cdot G \cdot H$, wobei wegen Ähnlichkeit der Produkte $A = B \cdot q$
und $C : F = D : G = E : H$

Ist $C \cdot D = K$ und $F \cdot G = L$, dann ist $K \cdot E = A$ und $L \cdot H = B$.
und es gibt mit der Ergänzung von $K : L$ zur fortgesetzt gleichen Proportion ein M,
so dass $D \cdot F = M$ und da $D \cdot C = K$ ist $C : F = K : M$
da $G \cdot F = L$ ist $D : G = M : L$ somit $K : M : L$

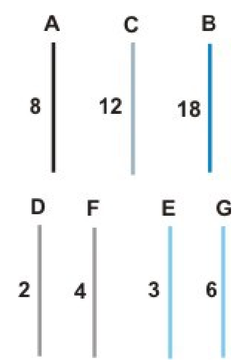
Ist $E \cdot M = N$ und $H \cdot M = O$, dann ist $E : H = N : O$
da $E \cdot K = A$ und $E \cdot M = N$, ist $K : M = A : N$
somit $K : M = C : F = D : G = E : H = A : N = N : O$
Es ist wie oben $K : M = M : L$, da $H \cdot M = O$ und $H \cdot L = B$
ist $M : L = O : B$ und damit ist $N : O = O : B$ und $A : N : O : B$

Da $A : N = C : F = D : G = E : H$ ist $A : B = C^3 : F^3 = D^3 : G^3 = E^3 : H^3$
damit ist $(C \cdot D \cdot E) : (F \cdot G \cdot H) = C^3 : F^3 = D^3 : G^3 = E^3 : H^3$.

VIII.20.
Können zwei Zahlen mit einer eingefügten Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann sind sie ähnliche Produkte.

Wenn zwischen zwei Zahlen A und B eine Zahl C zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt werden kann, dann, sage ich, sind A und B ähnliche Produkte.

Denn, sind D und E die kleinsten Zahlen im gleichen Verhältnis wie A und C, dann ist D gleich oft Teiler von A wie E von C und ebenso oft sei F Vielfache der Eins. Dann ist F multipliziert mit D gleich A. Ist A ein Produkt, sind D und F Faktoren.
Da D und E die kleinsten Zahlen sind im gleichen Verhältnis wie C und B, ist D gleich oft Teiler von C wie E von B und ebenso oft sei die G Vielfache der Eins. Dann ist G multipliziert mit E gleich B. Ist auch B ein Produkt, sind E und G Faktoren.



Sodann, sage ich, sind die Produkte ähnlich. Es ist F multipliziert mit D gleich A und F multipliziert mit E gleich C ist, also verhält sich D zu E wie A zu C und wie C zu B. Da nun E multipliziert mit F gleich C und E multipliziert mit G gleich B ist, verhält sich F zu G wie C zu B.
Da C zu B sich verhält wie D zu E, verhält sich D zu E wie F zu G und, bei Umordnung, verhält sich D zu F wie E zu G.

Da ihre Faktoren in Proportion stehen, sind A und B ähnliche Produkte, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist $A : C : B$
und ist $A / C = D / E$ wobei D / E gekürzt, dann $D \cdot C / E = A$ und für $F = C / E$ ist $D \cdot F = A$
Ist $D / E = C / B$ dann $E \cdot C / D = B$ und für $G = C / D$ ist $E \cdot G = B$
Es ist $D : E = A : C = C : B$.
Wegen $E \cdot F = C$ und $E \cdot G = B$ ist $F : G = C : B$ und $D : E = F : G$,
damit ist $D : F = E : G$, und es ist A zu B proportional mit dem Proportionalitätsfaktor E / D.

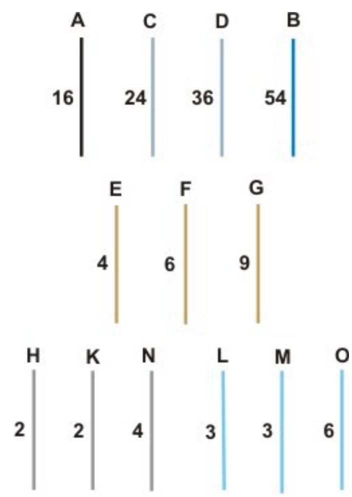
VIII.21.
Können zwei Zahlen mit zwei eingefügten Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, sind sie ähnliche Produkte dreier Faktoren.

Wenn zwischen zwei Zahlen A und B zwei Zahlen C und D zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt werden können, sage ich, sind A und B ähnliche Produkte dreier Faktoren.

Denn, sind E, F, G die kleinsten Zahlen im Verhältnis der A, C, D, dann sind E und G mit einer Zahl F zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt und E und G sind ähnliche Produkte. Hat E die Faktoren H und K und G die Faktoren L und M, dann verhält sich H zu L wie K zu M. Es sind A, C, D gleiche Vielfache im Verhältnis wie E, F, G.

Da E und G die kleinsten Zahlen unter denen sind, die das gleiche Verhältnis haben, sind sie gleiche Teiler, die größere von den größeren wie die kleinere von den kleineren, nämlich das Vorderglied von den Vordergliedern und das Hinterglied von den Hintergliedern.
Deshalb ist E ebenso oft Teiler von A wie G Teiler von D. Ist A so oft Vielfache von E wie N Vielfache der Eins, dann ist N multipliziert mit E gleich A. Da H multipliziert mit K gleich E ist, ist deshalb N multipliziert mit H multipliziert mit K gleich A.
Da A ein Produkt ist, sind H, K, N seine Faktoren.

Da nun E, F, G die kleinsten Zahlen im gleichen Verhältnis wie C, D, B sind, ist E so oft Teiler von C wie G von B. Ist C so oft Vielfache von E wie O Vielfache der Eins, dann ist O multipliziert mit G gleich B, L multipliziert mit M gleich G, also O multipliziert mit L multipliziert mit M gleich B.
Da B ein Produkt ist, sind L, M, O seine Faktoren.



A und B sind dann, sage ich, ähnliche Produkte.
Denn wenn N multipliziert mit E gleich A und O multipliziert mit E gleich C ist, dann verhält sich N zu O wie A zu C und wie E zu F. Da sich E zu F verhält wie H zu L und wie K zu M, verhält sich H zu L wie K zu M und wie N zu O, wobei H, K, N die Faktoren von A und L, M, N die Faktoren von B sind.
Deshalb sind Produkte A und B ähnliche Produkte, was zu zeigen war.

Anmerkung:

Ist $A : C : D : B$ eine geometrische Folge mit $C = A \cdot q$, dann sind A, B Kubikzahlen.
und ist $D : A = G : E$, $G : E$ gekürzt, dann ist $E \cdot q = F$ das mittlere Glied von $E : F : G$.

Ist F eine natürliche Zahl, dann sind E und G natürlicher Zahlen.

Da A Vielfache von E, gibt es ein N, so dass $E \cdot N = A$
Ist $E = H \cdot K$, dann ist $H \cdot K \cdot N = A$
Da $C : D : B = E : F : G$, gibt es ein O, so dass $E \cdot O = C$ und $G \cdot O = B$

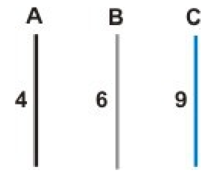
Da B Vielfache von G, gibt es ein O, so dass $G \cdot O = B$
Ist $G = L \cdot M$, dann ist $L \cdot M \cdot O = B$

Da $N \cdot E = A$ und $O \cdot E = C$ ist $N : O = A : C = E : F$
Da $E : F = H : L = K : M$ ist $H : L = K : M = N : O$
damit sind L, M, O zu H, K, N proportional und deshalb die Faktoren ähnlicher Produkte.

VIII.22.

Stehen drei Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und ist die erste eine Quadratzahl, dann ist auch die dritte eine Quadratzahl.

Wenn die Zahlen A, B, C in fortlaufend gleicher Proportion stehen und A ist eine Quadratzahl, dann, sage ich, ist auch C eine Quadratzahl.



Denn ist B eine Zahl, mit der A und C zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt sind, dann sind A und C ähnliche Produkte.
A ist Quadratzahl.

Deshalb ist auch C Quadratzahl, was zu zeigen war.

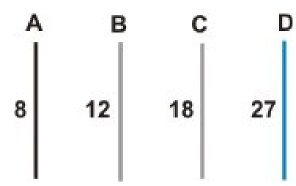
Anmerkung:

Ist $A = a^2$ dann ist $A : B : C = a^2 : (a^2 \cdot q) : (a^2 \cdot q^2)$
und das letzte Glied $(a \cdot q)^2$ der Proportion ist eine Quadratzahl.

VIII.23.

Stehen vier Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und ist die erste eine Kubikzahl, dann ist auch die vierte eine Kubikzahl.

Wenn die Zahlen A, B, C, D in fortlaufend gleicher Proportion stehen und A ist eine Kubikzahl, dann, sage ich, ist auch D eine Kubikzahl.



Denn sind B und C zwei Zahlen, mit denen A und D zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt wurden, dann sind A und D ähnliche Produkte.
A ist Kubikzahl.

Deshalb ist auch D Kubikzahl, was zu zeigen war.

Anmerkung:

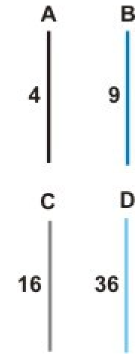
Ist $A = a^3$ dann ist $A : B : C : D = a^3 : (a^3 \cdot q) : (a^3 \cdot q^2) : (a^3 \cdot q^3)$
und das letzte Glied $(a \cdot q)^3$ der Proportion ist eine Kubikzahl.

Bei beliebiger Fortsetzung des Verfahrens in VIII.22, VIII.23 gilt für natürliche Zahlen k, a_i:
Ist das erste Glied $a_1 = m^k$ einer geometrischen Folge von $k+1$ Gliedern und dem Faktor q, dann ist das letzte Glied $a_{k+1} = (m \cdot q)^k$, und a_1 und a_{k+1} sind Potenzen mit Exponent k.

VIII.24.

Ist das Verhältnis zweier Zahlen wie das zweier Quadratzahlen und ist die erste eine Quadratzahl, dann ist auch die andere eine Quadratzahl.

Wenn die Zahlen A und B sich verhalten wie die Quadratzahlen C und D und ist A eine Quadratzahl, dann, sage ich, ist auch B eine Quadratzahl.



Denn sind C und D Quadratzahlen, dann sind sie ähnliche Produkte.
Also können C und D durch eine Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden. Da sich C und D verhalten wie A und B, können auch A und B zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.
A ist Quadratzahl.

Deshalb ist auch B Quadratzahl, was zu zeigen war.

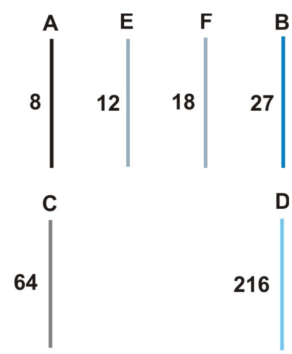
Anmerkung:

Ist für natürliche Zahlen $A / B = c^2 / d^2$, $C = c^2$, $D = d^2$ und $A = a^2$
dann ist $a^2 / B = c^2 / d^2$ und $a^2 \cdot d^2 / c^2 = B$ und $B = b^2$.

VIII.25.

Ist das Verhältnis zweier Zahlen wie das zweier Kubikzahlen und ist die erste eine Kubikzahl, dann ist auch die andere eine Kubikzahl.

Wenn die Zahlen A und B sich verhalten wie die Kubikzahlen C und D und ist A eine Kubikzahl, dann, sage ich, ist auch B eine Kubikzahl.



Denn sind C und D Kubikzahlen, dann sind sie ähnliche Produkte dreier Faktoren. Also können C und D durch zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.
Da sich C und D verhalten wie A und B, können auch A und B mit zwei Zahlen E und F zu einer fortlaufend gleichen Proportion der vier Zahlen A, E, F, B ergänzt werden.
A ist Kubikzahl.

Deshalb ist auch B Kubikzahl, was zu zeigen war.

Anmerkung:

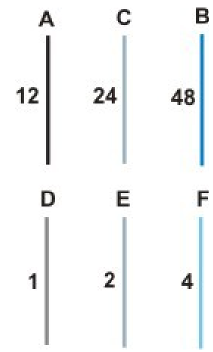
Ist für natürliche Zahlen $A / B = c^3 / d^3$, $C = c^3$, $D = d^3$ und $A = a^3$
dann ist $a^3 / B = c^3 / d^3$ und $a^3 \cdot d^3 / c^3 = B$ und $B = b^3$.

Bei beliebiger Fortsetzung des Verfahrens in VIII.23, VIII.24 gilt für alle natürlichen Zahlen k:
Ist für natürliche Zahlen $A / B = c^k / d^k$, $C = c^k$, $D = d^k$ und $A = a^k$
dann ist $a^k / B = c^k / d^k$ und $a^k \cdot d^k / c^k = B$ und $B = b^k$.

VIII.26.

Ein Produkt steht zu einem ähnlichen Produkt in einem Verhältnis wie die Quadratzahlen aus ihrer fortlaufend gleichen Proportion in kleinstmöglichen Zahlen.

Wenn A und B ähnliche Produkte sind, dann, sage ich, gibt es zwei Quadratzahlen, die sich verhalten wie A zu B.



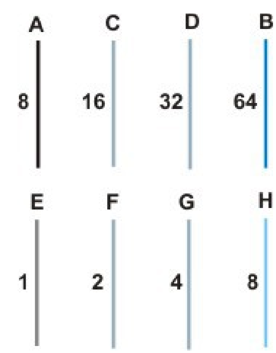
Denn die ähnlichen Produkte A und B können mit einer Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden; diese sei C.
Sind D, E, F die kleinsten Zahlen im gleichen Verhältnis wie A, C, B, dann sind D und F Quadratzahlen und D verhält sich zu F wie A zu B.

Da D und F Quadratzahlen sind im gleichen Verhältnis wie A und B, stehen A und B im gleichen Verhältnis wie Quadratzahlen, was zu zeigen war.

VIII.27.

Ein Produkt dreier Faktoren steht zu einem ähnlichen Produkt in einem Verhältnis wie die Kubikzahlen aus ihrer fortlaufend gleichen Proportion in kleinstmöglichen Zahlen.

Wenn A und B ähnliche Produkte dreier Faktoren sind, dann, sage ich, gibt es zwei Kubikzahlen, die sich verhalten wie A zu B.



Denn die Produkte A und B können mit zwei Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden; diese seien C und D.
Sind E, F, G, H die kleinsten Zahlen im Verhältnis wie A, C, D, B, dann sind E und H Kubikzahlen.
Die Kubikzahl E verhält sich zu H wie A zu B.

Also verhalten sich A und B wie zwei Kubikzahlen, was zu zeigen war.