Euklid: Stoicheia

(Die Elemente des Euklid)

Buch I.

I.1.

Auf einer gegebenen geraden Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten.

I.2.

An einen gegebenen Punkt eine gegebene gerade Strecke legen.

I.3.

Bei zwei gegebenen ungleichen geraden Strecken, eine der kleineren gleiche von der größeren abschneiden.

I.4.

Sind bei zwei Dreiecken zwei Seiten des einen gleich zwei Seiten des andern und ist auch der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich, dann stimmen die Seiten überein, auf denen die Dreiecke errichtet sind, und die errichteten Dreiecke, somit die übrigen Winkel, die diesen Seiten gegenüber liegen.

I.5.

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel auf der Grundseite, auf der die Schenkel errichtet sind, gleich und, bei Verlängerung der beiden Schenkel, auch die Winkel darunter.

I.6.

Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, dann sind auch die ihnen gegenüber liegenden Seiten gleich.

I.7.

Treffen sich, von den Endpunkten einer Strecke aus, zwei gerade Strecken in einem Punkt, dann können zwei andere auf derselben Strecke errichtete paarweise gleiche gerade Strecken sich nicht in einem anderen Punkt treffen, als die beiden ersten.

I.8.

Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen gleich zwei Seiten des andern und auch die Grundseiten gleich, auf denen sie errichtet sind, dann sind auch die Winkel gleich, die von den Seiten eingeschlossen werden.

I.9.

Einen gradlinigen Winkel in zwei gleiche Teile teilen.

I.10.

Eine gerade Strecke in zwei gleiche Teile teilen.

I.11.

Auf einer Geraden in einem gegebenen Punkt die Senkrechte errichten.

I.12.

Auf einer Gerade zu einem Punkt, der nicht auf ihr liegt, die Senkrechte ziehen.

I.13.

Die beiden Winkel, die eine Gerade mit einer auf ihr errichteten Strecke bildet, sind entweder zwei rechte oder zusammen gleich zwei rechten.

I.14.

Zwei Strecken, die mit einer Strecke an einem ihrer Endpunkte Winkel bilden, die zwei rechten gleich sind, liegen auf der gleichen Geraden.

I.15.

Am Schnittpunkt zweier Geraden sind die einander gegenüber liegenden Winkel gleich.

I.16.

Wird an einem Dreieck eine Seite verlängert, dann ist der außen liegende Winkel größer als einer der innen gegenüber liegenden Winkel.

I.17.

Im Dreieck sind irgend zwei Winkel zusammen kleiner als zwei rechte.

I.18.

Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

I.19.

Im Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

I.20.

Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

I.21.

Werden über der Seite eines Dreiecks zwei Strecken errichtet, die sich in einem Punkt im Innern des Dreiecks treffen, dann sind diese Strecken zusammen kleiner als die beiden Seiten des Dreiecks zusammen über derselben Seite, schließen aber einen größeren Winkel ein.

I.22.

Aus drei gegebenen Strecken, deren je zwei zusammen größer als die dritte sind, ein Dreieck konstruieren.

I.23.

An eine Gerade in einem gegebenen Punkt einen gegebenen Winkel anlegen.

I.24.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich zwei Seiten eines anderen Dreiecks, ist aber der eine eingeschlossene Winkel größer als der andere, dann ist auch die Grundseite des einen, auf der die Seiten errichtet sind, größer als die Grundseite des anderen.

I.25.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich zwei Seiten eines anderen Dreiecks, ist aber die Grundseite, auf der die Seiten errichtet sind, größer als die Grundseite des anderen, dann liegt ihr ein größerer Winkel gegenüber wie der anderen Grundseite.

I.26.

Sind bei zwei Dreiecken zwei Winkel des einen gleich zwei Winkeln des andern und ist entweder die Seite zwischen den Winkeln oder eine, die einem der gleichen Winkel gegenüber liegt, des einen Dreiecks gleich derjenigen im anderen, dann sind auch die übrigen Seiten und der übrige Winkel im einen gleich denjenigen im andern.

I.27.

Werden zwei Gerade von einer Geraden geschnitten und sind wechselseitige Winkel gleich, dann sind die beiden Geraden parallel.

I.28.

Werden zwei Gerade von einer Geraden geschnitten und ist ein äußerer gleich dem innen an derselben Geraden gegenüber liegenden Winkel oder sind beide an einer Geraden innen liegende Winkel zusammen gleich zwei rechten, dann sind die beiden Geraden parallel.

I.29.

Werden zwei parallele Gerade von einer Geraden geschnitten, dann sind wechselseitige Winkel gleich, dann sind Stufenwinkel gleich und die beiden innen an einer Geraden liegenden Winkel sind gleich zwei rechten.

I.30.

Sind Gerade zu der gleichen Geraden parallel, dann sind sie zueinander parallel.

I.31.

Zu gegebenem Punkt und gegebener Geraden eine Parallele ziehen.

I.32.

An einem Dreieck, an dem eine Seite verlängert ist, ist der äußere Winkel gleich den beiden innen gegenüber liegenden zusammen und die drei inneren Winkel des Dreiecks zusammen sind gleich zwei rechten.

I.33.

Gerade Strecken, die die Endpunkte zweier gleicher gerader und paralleler Strecken verbinden, sind selbst gleich und parallel.

I.34.

Im Parallelogramm sind gegenüber liegende Seiten und Winkel gleich und es teilt die Diagonale das Parallelogramm in zwei gleiche Teile.

I.35.

Parallelogramme, auf derselben Grundseite errichtet, zwischen denselben Parallelen sind gleich.

I.36.

Parallelogramme, auf gleichen Grundseiten auf derselben Geraden errichtet, zwischen denselben Parallelen sind gleich.

I.37.

Dreiecke, auf derselben Grundseite errichtet, zwischen denselben Parallelen sind gleich.

I.38.

Dreiecke, auf gleichen Grundseiten auf derselben Geraden errichtet und zwischen denselben Parallelen sind gleich.

I.39.

Gleiche Dreiecke, auf derselben Grundseite errichtet, liegen zwischen denselben Parallelen.

I.40.

Gleiche Dreiecke, auf gleichen Grundseiten auf derselben Geraden errichtet, liegen zwischen denselben Parallelen.

I.41.

Ein Parallelogramm, das mit einem Dreieck auf derselben Grundseite errichtet ist und wie dieses zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Doppelte des Dreiecks.

I.42.

Ein Parallelogramm errichten, das einem gegebenen Dreieck gleich ist und einen vorgegebenen Winkel hat.

I.43.

Ist ein Parallelogramm an einem Punkt seiner Diagonalen in vier Parallelogramme aufgeteilt, dann sind diejenigen Parallelogramme gleich, die neben den Parallelogrammen auf der Diagonalen liegen.

I.44.

Auf einer Strecke ein Parallelogramm errichten, das einem gegebenen Dreieck gleich ist und einen vorgegebenen Winkel hat.

I.45.

Ein Parallelogramm mit vorgegebenem Winkel errichten, das einer gegebenen gradlinigen Figur gleich ist.

I.46.

Über einer geraden Strecke das Quadrat beschreiben.

I.47.

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüber liegenden Seite gleich den Quadraten über den Seiten, die ihn einschließen, zusammen.

I.48.

Im Dreieck, bei dem das Quadrat über einer Seite gleich den Quadraten auf den anderen beiden Seiten zusammen ist, ist der Winkel, den die beiden Seiten einschließen, ein rechter.

Buch II.

II.1.

Wird von zwei Seiten, die ein Rechteck ergeben, eine in mehrere Teile aufgeteilt, dann ergeben die ganzen Seiten das gleiche Rechteck wie zusammen die Rechtecke aus den Teilen der geteilten Seite mit der anderen Seite ergeben.

II.2.

Die Rechtecke, die die Teile einer Seite mit dieser Seite ergeben, sind zusammen dem Quadrat über der Seite gleich.

II.3.

Das Rechteck, das eine ganze zweigeteilte Seite mit einem Teil ergibt, ist gleich dem Rechteck, das die Teile der Seite ergeben, zusammen mit dem Quadrat über dieser Seite.

II.4.

Wird eine Strecke in zwei geteilt, dann ist das Quadrat über der ganzen Strecke gleich den Quadraten über den Teilen und dem doppelten Rechteck, das die Teile ergeben, zusammen.

II.5.

Ist eine Strecke an einem Punkt in zwei gleiche Teile geteilt und in einem anderen Punkt in zwei ungleiche Teile, dann sind das Rechteck, das die ungleichen Teile ergeben, und das Quadrat über der Strecke zwischen den teilenden Punkten zusammen gleich dem Quadrat über der halben Strecke.

II.6.

Wird eine Strecke verlängert, dann ist das Rechteck, das sich aus der Verlängerung mit der ganzen verlängerten Strecke ergibt, zusammen mit dem Quadrat über der halben Strecke gleich dem Quadrat, das über der halben Strecke zusammen mit der Verlängerung errichtet ist.

II.7.

Wird eine Strecke geteilt, dann sind die Quadrate über der Strecke und über einem Teil zusammen gleich dem doppelten Rechteck aus der Strecke und dem einen Teil und dem Quadrat über dem anderen Teil zusammen.

II.8.

Wird eine Strecke geteilt und um eines der Teile verlängert, dann sind vier der Rechtecke, die die Strecke mit diesem Teil ergibt, zusammen mit dem Quadrat über dem anderen Teil gleich dem Quadrat über der verlängerten Strecke.

II.9.

Ist eine Strecke an einem Punkt in zwei gleiche Teile geteilt und in einem anderen Punkt in zwei ungleiche Teile, dann sind die Quadrate über den ungleichen Teilen zusammen gleich dem Doppelten aus dem Quadrat über der halben Strecke und dem Quadrat über der Strecke zwischen den teilenden Punkten zusammen.

II.10.

Wird eine Strecke verlängert, dann sind die Quadrate über der verlängerten Strecke und über der Verlängerung zusammen gleich dem Doppelten aus den Quadraten über der halben Strecke und über der halben Strecke mit der Verlängerung zusammen.

II.11.

Eine Strecke so zu teilen, dass das Rechteck, das die ganze Strecke mit einem Teil ergibt, gleich dem Quadrat über dem andern Teil ist.

II.12.

Im stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, größer als die Quadrate über den beiden anderen Seiten zusammen, und zwar um das doppelte Rechteck, das eine dieser Seiten mit ihrer Verlängerung bis zur Senkrechten auf ihr ergibt, die den Eckpunkt des Dreiecks trifft.

II.13.

Im spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Seite, die dem spitzen Winkel gegenüber liegt, kleiner als die Quadrate über den beiden anderen Seiten zusammen und zwar um das doppelte Rechteck, das eine dieser Seiten mit der Strecke auf ihr ergibt, die bis zu der Senkrechten verkürzt ist, die den Eckpunkt des Dreiecks trifft.

II.14.

Das einem gegebenen Polygon gleiche Quadrat errichten.

Buch III.

III.1.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises auffinden.

III.2.

Punkte auf einer geraden Strecke zwischen zwei Punkten auf einer Kreislinie liegen innerhalb des Kreises.

III.3.

Teilt eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade den Abschnitt einer schneidenden Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt geht, zwischen den Schnittpunkten in zwei gleiche Teile, dann bildet sie mit ihr rechte Winkel und bildet sie rechte Winkel, dann teilt sie den Abschnitt einer schneidenden Geraden zwischen den Schnittpunkten, nämlich die Sehne, in zwei gleiche Teile.

III.4.

Schneiden sich zwei Sehnen, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, sind sie dadurch nicht beide in zwei gleiche Teile geteilt.

III.5.

Zwei Kreise, die sich schneiden, haben nicht denselben Mittelpunkt.

III.6.

Zwei Kreise, die sich berühren, haben nicht denselben Mittelpunkt.

III.7.

Unter den Strecken, die von einem, vom Mittelpunkt verschiedenen, Punkt auf dem Durchmesser zu Punkten auf der Kreislinie gezogen sind, ist die Strecke von diesem Punkt durch den Mittelpunkt die größte und der Rest des Durchmessers die kleinste. Unter den anderen Strecken ist diejenige, die der großen Strecke auf dem Durchmesser näher ist, größer als die entferntere und nur jeweils eine Strecke ist unter ihnen, die kürzer als die größte sind, einer anderen gleich.

III.8.

Unter den Geraden, die von einem Punkt außerhalb eines Kreises durch den Kreis gelegt werden, ist die Strecke, die die Kreislinie vom Punkt aus von innerhalb des Kreises trifft, auf der am größten, die durch den Mittelpunkt geht, unter den andern ist die Strecke auf der ihr näheren größer und auf der entfernteren kleiner. Die Strecke, die die Kreislinie vom Punkt aus von außen trifft, aber ist auf der Geraden durch den Mittelpunkt am kleinsten und unter den andern ist diese Strecke auf der ihr näheren kleiner und die auf der entfernteren größer, und nur jeweils eine Strecke ist unter ihnen, die größer als die kleinste sind, einer anderen gleich.

III.9.

Gehen von einem Punkt innerhalb eines Kreises mehr als zwei gleiche Strecken zu Punkten auf der Kreislinie, dann ist dieser Punkt der Mittelpunkt.

III.10.

Ein Kreis schneidet einen anderen in nicht mehr als zwei Punkten.

III.11.

Berühren sich zwei Kreise von innen, dann geht die Gerade durch die beiden Mittelpunkte durch den Berührpunkt.

III.12.

Berühren sich zwei Kreise von außen, dann geht die Gerade durch die beiden Mittelpunkte durch den Berührpunkt.

III.13.

Kreise berühren sich in nicht mehr als einem Punkt, ob von innen oder von außen.

III.14.

Gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt und vom Mittelpunkt gleich weit entfernte Sehnen sind gleich.

III.15.

Unter den Strecken im Kreis ist der Durchmesser die größte und unter den Sehnen ist diejenige, die dem Mittelpunkt näher ist, größer als die entferntere.

III.16.

Die am Endpunkt eines Durchmessers errichtete Senkrechte fällt außerhalb des Kreises; es kann zwischen ihr und dem Kreis keine Gerade außerhalb des Kreises gezogen werden; der Winkel zwischen Kreislinie und Durchmesser ist größer und der Winkel zwischen Kreislinie und Senkrechter kleiner als jeder spitze Winkel.

III.17.

An einen Kreis von einem gegebenen Punkt aus die Tangente anlegen.

III.18.

Die durch den Berührpunkt einer Tangenten und den Mittelpunkt gelegte Gerade steht senkrecht auf der Tangenten.

III.19.

Auf der Senkrechten, die am Berührpunkt einer Tangenten auf ihr errichtet ist, liegt der Mittelpunkt des Kreises.

III.20.

Der Winkel im Mittelpunkt über einem Kreisbogen ist das Doppelte des Winkels in einem Punkt auf der Kreislinie.

III.21.

Die Winkel des gleichen Kreisabschnitts sind gleich.

III.22.

Im Viereck aus Sehnen sind gegenüber liegende Winkel gleich zwei rechten Winkeln.

III.23.

Über derselben Strecke können nicht ähnliche, aber ungleiche Kreisbögen errichtet sein.

III.24.

Ähnliche Kreisabschnitte mit gleichen Grundseiten sind gleich.

III.25.

Einen Kreisabschnitt zu dem Kreis ergänzen, von dem er Abschnitt ist.

III.26.

In gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel am Mittelpunkt und gleiche Winkel an Punkten der Kreislinie auf gleichen Kreisbögen.

III.27.

In gleichen Kreisen sind die auf gleichen Kreisbögen stehenden Winkel gleich, die im Mittelpunkt und die an Punkten der Kreislinie.

III.28.

In gleichen Kreisen schneiden gleiche Sehnen gleiche Kreisbögen ab, und es ist der größere dem größeren und der kleinere dem kleineren gleich.

III.29.

Die Strecken zwischen den Endpunkten gleicher Kreisbögen sind in gleichen Kreisen gleich.

III.30.

Einen Kreisbogen in zwei gleiche Teile teilen.

III.31.

Der Winkel des Halbkreises ist ein rechter Winkel, der Winkel eines größeren Kreisabschnitts ist kleiner, der eines kleineren Kreisabschnitts größer als ein rechter Winkel, der Winkel des Kreisbogens mit der Grundseite ist im größeren Kreisabschnitt größer und im kleineren Kreisabschnitt kleiner als ein rechter Winkel.

III.32.

Schneidet eine Gerade einen Kreis, dann ist ihr Winkel mit der Tangente im Schnittpunkt gleich dem der schneidenden Strecke gegenüber liegenden Winkel im Sehnendreieck, das über der schneidenden Strecke gegenüber errichtet ist.

III.33.

Auf einer Strecke einen Kreisabschnitt mit gegebenem Winkel errichten.

III.34.

Von einem Kreis einen Kreisabschnitt mit gegebenem Winkel schneiden.

III.35.

Das Rechteck aus den Abschnitten einer Geraden, die im Kreis von einer anderen geschnitten wird, ist gleich dem aus den Abschnitten der anderen Geraden.

III.36.

Das Quadrat über dem Abschnitt auf der Tangente, die von einer Geraden außerhalb des Kreises geschnitten wird, ist gleich dem Rechteck aus dem äußeren Abschnitt auf der schneidenden Geraden mit dem aus dem inneren und äußeren zusammengesetzten.

III.37.

Wird eine schneidende Gerade, nämlich eine Sekante, außerhalb des Kreises von einer Geraden geschnitten, die einen Punkt auf der Kreislinie trifft und ist das Quadrat über ihrem Abschnitt gleich dem Rechteck aus dem äußeren Abschnitt der Sekante mit dem aus dem inneren und äußeren zusammengesetzten Abschnitt der Sekante, dann ist diese Gerade eine Tangente.

Buch IV.

IV.1.

In einen Kreis eine gerade Strecke eintragen, die nicht größer als der Durchmesser ist.

IV.2.

In einen Kreis ein Dreieck einbeschreiben, dessen Winkel einem gegebenen gleich sind.

IV.3.

Um einen Kreis ein Dreieck beschreiben, dessen Winkel einem gegebenen gleich sind.

IV.4.

Einem gegebenen Dreieck einen Kreis einbeschreiben.

IV.5.

Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis beschreiben.

IV.6.

In einen Kreis ein Quadrat einbeschreiben.

IV.7.

Um einen Kreis ein Quadrat beschreiben.

IV.8.

In ein Quadrat einen Kreis einbeschreiben.

IV.9.

Um ein Quadrat einen Kreis beschreiben.

IV.10.

Ein gleichschenkliges Dreieck errichten, dessen Winkel an der Grundseite doppelt so groß sind wie der übrige.

IV.11.

In einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einbeschreiben.

IV.12.

Um einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck beschreiben.

IV.13.

In ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einen Kreis einbeschreiben.

IV.14.

Um ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einen Kreis beschreiben.

IV.15.

In einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Sechseck einbeschreiben.

IV.16.

In einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfzehneck einbeschreiben.

Buch V.

V.1.

Ist jede von mehreren Größen das gleiche Vielfache einer von gleich vielen anderen Größen, dann sind die einen zusammen dasselbe Vielfache von den anderen zusammen.

V.2.

Ist eine erste Größe das gleiche Vielfache einer zweiten wie eine dritte das Vielfache einer vierten, sowie eine fünfte das Vielfache der zweiten wie eine sechste das Vielfache der vierten, dann sind die erste und fünfte Größe zusammen das gleiche Vielfache der zweiten wie die dritte und sechste zusammen das Vielfache der vierten.

V.3.

Ist eine erste Größe das gleiche Vielfache einer zweiten wie eine dritte das Vielfache einer vierten, sowie eine fünfte das gleiche Vielfache der ersten wie eine sechste das Vielfache der dritten, so ist auch die fünfte Größe das gleiche Vielfache der zweiten wie die sechste Vielfache der vierten.

V.4.

Steht eine Größe im gleichen Verhältnis zur zweiten wie eine dritte zur vierten, dann stehen die erste und dritte Größe auch dann in einem gleichen Verhältnis zu der zweiten und vierten Größe, wenn die einen oder die anderen beiden vervielfacht werden.

V.5.

Ist eine Größe das gleiche Vielfache von einer anderen Größe, wie das von der einen Weggenommene das Vielfache des von der anderen Weggenommenen ist, dann ist auch der Rest der einen das gleiche Vielfache vom Rest der anderen.

V.6.

Sind zwei Größen gleiche Vielfache zweier anderer, deren gleiche Vielfache von ihnen weggenommen werden, dann verbleiben Reste, die gleich oder gleiche Vielfache der anderen Größen sind.

V.7.

Gleiche Größen stehen zu derselben Größe im gleichen Verhältnis und dieselbe Größe zu gleichen Größen.

V.8.

Von ungleichen Größen steht die größere zu einer anderen Größe in einem größeren Verhältnis als die kleinere und eine Größe steht zu kleineren in einem größeren Verhältnis als zu größeren.

V.9.

Sind Verhältnisse, in denen Größen zu derselben Größe stehen, gleich, dann sind die Größen gleich, ebenso wie wenn sie in gleichen Verhältnisse derselben Größe zu ihnen stehen.

V.10.

Ist das Verhältnis zu derselben Größe größer als andere Verhältnisse, dann ist die Größe, die in diesem Verhältnis steht, größer und ist das Verhältnis derselben Größe zu einer Größe größer als andere Verhältnisse, dann ist letztere Größe kleiner.

V.11.

Verhältnisse sind gleich, die demselben Verhältnis gleich sind.

V.12.

Stehen mehrere Größen in gleicher Proportion, dann verhalten sich die Vorderglieder zusammen zu den Hintergliedern zusammen wie eines der Vorderglieder zum Hinterglied.

V.13.

Steht eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis wie eine dritte zu einer vierten, hat aber die dritte zur vierten Größe eine größeres Verhältnis wie eine fünfte zu einer sechsten, dann ist das Verhältnis der ersten zur zweiten größer als das Verhältnis der fünften zur sechsten.

V.14.

Steht eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis wie eine dritte zu einer vierten und ist die erste größer als die dritte, dann ist auch zweite größer als die vierte, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

V.15.

Sind Größen gleiche Vielfache ihrer Teile, dann stehen die Teile im gleichen Verhältnis wie die ganzen Größen.

V.16.

Stehen vier Größen in Proportion, dann stehen sie auch in umgeordneter Proportion.

V.17.

Stehen Größen im gleichen Verhältnissen, dann sind auch die verkleinerten Verhältnisse unter sich gleich.

V.18.

Stehen Größen in gleichen Verhältnissen, dann sind auch die vergrößerten Verhältnisse unter sich gleich.

V.19.

Stehen Größen im gleichen Verhältnis, wie von ihnen abgeteilte Größen, dann stehen auch die Reste im gleichen Verhältnis.

V.20.

Stehen drei Größen wie ebenso viele andere in paarweise gleichen Verhältnissen und ist die erste größer als die dritte, dann ist auch die vierte größer als die sechste, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

V.21.

Stehen drei Größen mit ebenso vielen anderen in kreuzweiser Proportion und ist die erste größer als die dritte, dann ist auch die vierte größer als die sechste, und wenn gleich gleich, und wenn kleiner kleiner.

V.22.

Stehen mehrere Größen mit gleich vielen anderen paarweise in gleichen Verhältnissen, dann dann stehen die ersten und letzten Glieder in Proportion aufgrund Gleichheit.

V.23.

Stehen drei Größen mit gleich vielen anderen in kreuzweiser Proportion, dann stehen die ersten und letzten Glieder in Proportion aufgrund Gleichheit.

V.24.

Steht eine Größe zu einer anderen im gleichen Verhältnis wie eine dritte zu einer vierten und steht eine fünfte zur zweiten wie eine sechste zur vierten, dann stehen die erste und fünfte zusammen im gleichen Verhältnis zur zweiten wie die dritte und sechste zusammen zur vierten.

V.25.

Von vier Größen in Proportion sind die größte und die kleinste zusammen größer als die beiden übrigen.

Buch VI.

VI.1.

Dreiecke und Parallelogramme mit gleicher Höhe stehen im gleichen Verhältnis untereinander wie ihre Grundseiten.

VI.2.

Eine Parallele zu einer Seite des Dreiecks teilt die beiden anderen Seiten im gleichen Verhältnis und werden im Dreieck zwei Seiten im gleichen Verhältnis geteilt, dann ist die Gerade durch die teilenden Punkte parallel zur übrigen Seite.

VI.3.

Wird der Winkel eines Dreiecks in zwei gleiche Teile geteilt, dann teilt die Winkelhalbierende die dem Winkel gegenüber liegende Seite im gleichen Verhältnis in dem die beiden übrigen Seiten stehen, und wird die Grundseite im gleichen Verhältnis geteilt, in dem die übrigen Seiten des Dreiecks stehen, dann wird der Winkel über der Grundseite von der Geraden durch den Punkt, an dem der Winkel liegt, und den teilenden Punkt, in zwei gleiche Teile geteilt.

VI.4.

In gleichwinkligen Dreiecken stehen die Seiten, die gleichen Winkeln gegenüber liegen, im gleichen Verhältnis zu den Seiten, mit denen sie gleiche Winkel einschließen.

VI.5.

Stehen die Seiten zweier Dreiecke in Proportion, dann sind sie gleichwinklig, wobei diejenigen Winkel gleich sind, die den entsprechenden Seiten in Proportion gegenüber liegen.

VI.6.

Ist in einem Dreieck ein Winkel einem Winkel in einem anderen Dreieck gleich und stehen die Seiten, die diese Winkel einschließen, in Proportion, dann sind die beiden Dreiecke gleichwinklig, wobei diejenigen Winkel gleich sind, die den entsprechenden Seiten in Proportion gegenüber liegen.

VI.7.

Ist in einem Dreieck ein Winkel einem Winkel in einem anderen Dreieck gleich und stehen die Seiten beider Dreiecke, die einen der anderen Winkel einschließen, in Proportion und sind dazu die übrigen Winkel entweder kleiner oder nicht kleiner als ein rechter Winkel, dann sind die beiden Dreiecke gleichwinklig, wobei die Winkel gleich sind, die von den entsprechenden Seiten in Proportion eingeschlossen werden.

VI.8.

Wird im rechtwinkligen Dreieck vom Punkt des rechten Winkels die Senkrechte auf der Grundlinie errichtet, dann sind beide an der Senkrechten liegende Dreiecke einander und dem ganzen Dreieck ähnlich.

VI.9.

Von einer Strecke einen Teil abschneiden.

VI.10.

Eine ungeteilte Strecke einer geteilten ähnlich aufteilen.

VI.11.

Zu zwei Strecken die Strecke finden, die sich zu ihnen verhält wie das dritte Glied in fortlaufend gleicher Proportion.

VI.12.

Zu drei Strecken die Strecke finden, die sich zu ihnen verhält wie das vierte Glied in Proportion.

VI.13.

Zu zwei Strecken die Strecke finden, die sich zu ihnen verhält wie das mittlere Glied in fortlaufend gleicher Proportion.

VI.14.

Die Seiten zweier gleicher und gleichwinkliger Parallelogramme stehen in umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm, und gleichwinklige Parallelogramme deren Seiten in umgekehrten Verhältnissen zu den Seiten am gleichen Winkel im anderen Parallelogramm stehen, sind gleich.

VI.15.

In gleichen Dreiecken mit einem gleichen Winkel stehen die Seiten, die diesen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen und Dreiecke mit einem gleichen Winkel sind gleich, in denen die Seiten, die diesen Winkel einschließen, in umgekehrten Verhältnissen stehen.

VI.16.

Stehen vier Strecken in Proportion, dann ist das Rechteck, das die äußeren Glieder ergeben, gleich dem das die inneren ergeben und sind zwei Rechtecke gleich, dann stehen die sie ergebenden Seiten wie innere und äußere Glieder in Proportion.

VI.17.

Stehen drei Strecken in fortlaufend gleicher Proportion, dann ist das Rechteck, das die äußeren Glieder ergeben, gleich dem Quadrat über dem mittleren Glied und ist ein Rechteck gleich einem Quadrat, dann stehen die Seiten, die das Rechteck ergeben, wie äußere Glieder mit der Seite des Quadrats in fortlaufend gleicher Proportion.

VI.18.

Auf einer Strecke eine einer anderen ähnliche gradlinige Figur ähnlich errichten, wie die andere aufzuteilen ist.

VI.19.

Ähnliche Dreiecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate über entsprechenden Seiten.

VI.20.

Ähnliche Polygone sind in gleich viele ähnliche und einander entsprechende Dreiecke aufteilbar, und sie verhalten sich zueinander wie die Quadrate über entsprechenden Seiten.

VI.21.

Gradlinige Figuren die einer gradlinigen Figur ähnlich sind, sind einander ähnlich.

VI.22.

Die auf vier Strecken in Proportion ähnlich errichteten und ähnlichen gradlinigen Figuren stehen in Proportion und vier Seiten, auf denen ähnliche gradlinige Figuren ähnlich in Proportion errichtet sind, stehen in Proportion.

VI.23.

Gleichwinklige Parallelogramme verhalten sich zueinander wie die äußeren Glieder der fortlaufenden Proportion ihrer Seiten.

VI.24.

In einem an einem Punkt seiner Diagonalen in vier Parallelogramme aufgeteilten Parallelogramm sind die auf der Diagonalen liegenden Parallelogramme einander und dem ganzen ähnlich.

VI.25.

Eine einer gegebenen gradlinigen Figur ähnliche Figur errichten, die einer anderen gegebenen gleich ist.

VI.26.

Die Diagonalen eines Parallelogramms und eines ähnlichen, davon ähnlich abgeteilten, Parallelogramms mit demselben Winkel, liegen aufeinander.

VI.27.

Unter allen den ähnlich errichteten Parallelogrammen über einer geteilten Strecke, deren einer Teil dem Parallelogramm über der halben Strecke ähnlich ist, ist bei demjenigen der andere Teil am größten, der über der halben Strecke errichtet ist.

VI.28.

Auf einer geteilten Strecke ein Parallelogramm errichten, dessen einer Teil gleich einer gegebenen gradlinigen Figur und der andere Teil einem gegebenen Parallelogramm ähnlich und nicht größer als der erste Teil ist.

VI.29.

Auf einer Strecke mit Verlängerung ein Parallelogramm errichten, das einer gegebenen gradlinigen Figur gleich und dessen Teil über der Verlängerung einem gegebenen Parallelogramm ähnlich ist.

VI.30.

Eine Strecke stetig teilen.

VI.31.

Im rechtwinkligen Dreieck ist die gradlinige Figur über der Hypotenuse gleich den ähnlichen und ähnlich errichteten Figuren über den Katheten zusammen.

VI.32.

Stehen zwei Seiten eines Dreiecks im gleichen Verhältnis wie zwei Seiten eines andern, die zu ihnen parallel sind, und haben die Dreiecke einen gemeinsamen Eckpunkt, dann liegen die übrigen Seiten auf derselben Geraden.

VI.33.

In gleichen Kreisen stehen die Winkel über den Kreisbögen, im Mittelpunkt wie auf der Kreislinie, im gleichen Verhältnis wie die Kreisbögen.

Buch VII.

VII.1.

Wird von zwei ungleiche Zahlen ausgehend, immer wieder die kleinere von der größeren Zahl subtrahiert, und bleibt schließlich der Rest Eins, dann sind sie teilerfremd.

VII.2.

Zu zwei Zahlen, die nicht teilerfremd sind, den größten gemeinsamen Teiler finden.

VII.3.

Zu drei Zahlen, die nicht teilerfremd sind, den größten gemeinsamen Teiler finden.

VII.4.

Eine kleinere Zahl ist entweder Teiler oder ein Teil einer größeren Zahl.

VII.5.

Ist eine Zahl ein bestimmter Teiler einer Zahl und eine andere Zahl der gleiche Teiler einer weiteren Zahl, dann ist die Summe der Zahlen auch der gleiche Teiler der Summe der Zahlen von denen sie Teiler sind.

VII.6.

Ist eine Zahl ein bestimmter Teil einer Zahl und eine andere der gleiche Teil einer weiteren Zahl, dann ist die Summe der kleineren Zahlen der gleiche Teil von der Summe der größeren Zahlen.

VII.7.

Ist eine Zahl ein Teiler einer größeren und das von ihr Subtrahierte der gleiche Teiler wie das von der größeren Subtrahierte, dann ist auch der Rest der Zahl der gleiche Teiler vom Rest der größeren.

VII.8.

Ist eine Zahl ein solcher Teil einer anderen wie das von ihr Subtrahierte ein Teil des von der größeren Subtrahierte ist, so ist auch ihr Rest der gleiche Teil vom größeren Rest wie ihr Ganzes vom größeren Ganzen.

VII.9.

Ist eine Zahl von einer anderen der gleiche Teiler wie eine dritten von einer vierten, dann ist, wenn umgeordnet wird, welcher Teil oder Teiler auch immer die erste Zahl von der dritten ist, die zweite der gleiche Teil oder Teiler von der vierten.

VII.10.

Ist eine Zahl von einer anderen der gleiche Teil wie eine dritte von einer vierten, dann ist, wenn umgeordnet wird, welcher Teil oder Teiler auch immer die erste Zahl von der dritten ist, die zweite der gleiche Teil oder Teiler von der vierten.

VII.11.

Wenn sich ein Ganzes zu einem anderen Ganzen verhält wie ein davon Subtrahiertes zu dem vom andern Subtrahierten, dann verhalten sich auch die Reste zueinander wie das Ganze zum andern.

VII.12.

In einer Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie die erste zur zweiten Zahl.

VII.13.

Stehen vier Zahlen in einer Proportion, dann stehen sie auch nach Umordnen in Proportion zu einander.

VII.14.

Sind mehrere Zahlen mit anderen gegeben, die mit ihnen paarweise in Proportion stehen, so stehen jeweils auch die ersten mit der letzten paarweise in Proportion.

VII.15.

Ist eine Zahl so oft Vielfache von der Eins wie eine andere Zahl Vielfache von einer weiteren, so ist, nach Umordnung, die dritte Zahl so oft Vielfache von der Eins wie die vierte Vielfache von der zweiten.

VII.16.

Werden zwei Zahlen in der einen und in anderen Reihenfolge multipliziert, so sind die Ergebnisse gleich.

VII.17.

Wird eine Zahl mit jeder von zwei anderen Zahlen multipliziert, dann verhalten sich die beiden Produkte wie die beiden Zahlen, mit denen multipliziert wurde.

VII.18.

Wird von zwei Zahlen jede mit einer dritten multipliziert, dann verhalten sich die Produkte wie die beiden Zahlen, die multipliziert wurden.

VII.19.

Stehen vier Zahlen in Proportion, dann ist das Produkt der ersten mit der vierten Zahl dem Produkt der zweiten mit der dritten Zahl gleich und ist das Produkt der ersten mit der vierten Zahl von vier Zahlen gleich dem Produkt der zweiten mit der dritten Zahl, dann stehen sie in Proportion.

VII.20.

Stehen drei Zahlen in Proportion, so daß sich die erste zur zweiten so verhält wie die zweite zur dritten Zahl, dann ist das Produkt der ersten mit der dritten Zahl der Quadratzahl aus der zweiten gleich und ist das Produkt aus erster und dritter Zahl der Quadratzahl aus der zweiten gleich, dann stehen die drei Zahlen in Proportion.

VII.21.

Stehen drei Zahlen wie ebenso viele andere in gleicher Proportion und sind sie untereinander kreuzweise proportional, dann verhält sich die erste zur dritten Zahl der einen Proportion wie die erste zur dritten Zahl der anderen Proportion.

VII.22.

Die kleinsten beiden Zahlen sind von allen Zahlen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen, die gleichen Teiler, die kleinere von den kleineren so wie die größere von den größeren.

VII.23.

Teilerfremde Zahlen sind die kleinsten der Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen.

VII.24.

Die kleinsten Zahlen unter denen, die im gleichen Verhältnis stehen, sind teilerfremd.

VII.25.

Sind zwei Zahlen teilerfremd, dann ist ein Teiler der einen Zahl teilerfremd zur anderen.

VII.26.

Sind zwei Zahlen zu einer anderen teilerfremd, dann ist auch ihr Produkt teilerfremd zu dieser Zahl.

VII.27.

Sind zwei Zahlen teilerfremd, dann ist auch die Quadratzahl der einen teilerfremd zur anderen Zahl.

VII.28.

Ist von zwei Zahlen jede zu einer anderen teilerfremd, dann ist das Produkt der einen beiden Zahlen zu dem der anderen teilerfremd.

VII.29.

Sind zwei Zahlen teilerfremd und werden sie mit sich selbst multipliziert, dann sind die entstehenden Zahlen teilerfremd, und werden die gegebenen Zahlen mehrfach mit sich selbst multipliziert, dann sind alle zuletzt daraus entstehenden Zahlen teilerfremd, die aus der einen entstehenden zu den aus der anderen.

VII.30.

Sind zwei Zahlen teilerfremd, dann ist ihre Summe zu jeder von ihnen teilerfremd und ist die Summe zweier Zahlen zu einer von ihnen teilerfremd, dann sind sie selbst teilerfremd.

VII.31.

Primzahlen sind teilerfremd zu den Zahlen, die nicht ihre Vielfache sind.

VII.32.

Ist das Produkt zweier Zahlen ein Vielfaches einer Primzahl, dann ist auch einer der Faktoren ein Vielfaches dieser Primzahl.

VII.33.

Jedes Produkt ist das Vielfache einer Primzahl.

VII.34.

Jede Zahl ist selbst Primzahl oder ist das Vielfache einer Primzahl.

VII.35.

Zu beliebigen Zahlen die kleinsten finden, die im gleichen Verhältnis stehen.

VII.36.

Zu zwei Zahlen die kleinste Zahl finden, die ihr gemeinsames Vielfaches ist.

VII.37.

Sind zwei Zahlen Teiler einer anderen, dann ist auch die kleinste Zahl, die ihr gemeinsames Vielfaches ist, Teiler dieser Zahl.

VII.38.

Die kleinste Zahl finden, die gemeinsames Vielfaches dreier Zahlen ist.

VII.39.

Der Teiler einer gegebenen Zahl ist Nenner eines Teils der Zahl, der ein Teiler der Zahl ist.

VII.40.

Der Teil einer Zahl hat einen Nenner, dessen Vielfaches die Zahl ist.

VII.41.

Den kleinsten gemeinsamen Nenner von Teilen gegebener Zahlen finden.

Buch VIII.

VIII.1.

Stehen mehrere Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und sind die erste und letzte Zahl teilerfremd, dann sind sie die kleinsten unter denen, die im gleichen Verhältnis wie sie stehen.

VIII.2.

Die kleinsten Zahlen finden, die in einem vorgegebenen Verhältnis stehen.

VIII.3.

Stehen mehrere Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und sind sie die kleinsten unter denen, die in diesem Verhältnis stehen, dann sind die erste und die letzte Zahl teilerfremd.

VIII.4.

Zu den kleinsten Zahlen in mehreren beliebigen Verhältnissen die kleinsten Zahlen finden, die in fortlaufender Proportion in den gegebenen Verhältnissen stehen.

VIII.5.

Das Verhältnis zweier Produkte ist gleich den multiplizierten Verhältnissen ihrer Faktoren.

VIII.6.

Ist von mehreren Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion die zweite keine Vielfache der ersten, ist keine Zahl Vielfache einer der anderen.

VIII.7.

Ist von mehreren Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion die letze Zahl Vielfache der ersten, dann ist auch die zweite Zahl Vielfache der ersten.

VIII.8.

Können zwei Zahlen durch Einfügen weiterer Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann können ebenso viele Zahlen zwischen zwei andere Zahlen, die im gleichen Verhältnis stehen, eingefügt und zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

VIII.9.

Können zwei teilerfremde Zahlen durch Einfügen weiterer Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann kann mit ebenso viele Zahlen die Eins und jede der beiden Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

VIII.10.

Kann jede von zwei Zahlen und die Eins durch Einfügen weiterer Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann können die beiden Zahlen durch Einfügen ebenso vieler Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden.

VIII.11.

Zwischen zwei Quadratzahlen kann eine Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion eingefügt werden, und es verhalten sich die Quadratzahlen wie das mit sich multiplizierte Verhältnis der Grundzahlen.

VIII.12.

Zwischen zwei Kubikzahlen können zwei Zahlen zu einer fortlaufenden Proportion eingefügt werden, und es verhalten sich die Kubikzahlen wie das dreimal als Faktor genommene Verhältnis der Grundzahlen.

VIII.13.

Werden mehrere Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion mit sich selbst multipliziert, stehen die Produkte gleichfalls in fortlaufend gleicher Proportion, werden diese mit den Anfangszahlen nochmals multipliziert, dann ebenfalls und auch dann, wenn dies wiederholt wird.

VIII.14.

Ist eine Quadratzahl Teiler einer anderen Quadratzahl, dann ist auch die Grundzahl der einen Teiler der anderen und ist eine Grundzahl Teiler einer anderen, so sind es auch ihre Quadratzahlen.

VIII.15.

Ist eine Kubikzahl Teiler einer anderen Kubikzahl, dann ist auch die Grundzahl der einen Teiler der anderen und ist eine Grundzahl Teiler einer anderen, so sind es auch ihre Kubikzahlen.

VIII.16.

Sind zwei Quadratzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Grundzahlen und sind zwei Grundzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Quadratzahlen.

VIII.17.

Sind zwei Kubikzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Grundzahlen und sind zwei Grundzahlen teilerfremd, dann sind es auch ihre Kubikzahlen.

VIII.18.

Ähnliche Produkte können mit einer eingefügten Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden und ihr Verhältnis ist gleich dem der Quadratzahlen der Faktoren im gleichen Verhältnis.

VIII.19.

Ähnliche Produkte dreier Faktoren können mit zwei eingefügten Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden und ihr Verhältnis ist wie das der Kubikzahlen der Faktoren im gleichen Verhältnis.

VIII.20.

Können zwei Zahlen mit einer eingefügten Zahl zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, dann sind sie ähnliche Produkte.

VIII.21.

Können zwei Zahlen mit zwei eingefügten Zahlen zu einer fortlaufend gleichen Proportion ergänzt werden, sind sie ähnliche Produkte dreier Faktoren.

VIII.22.

Stehen drei Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und ist die erste eine Quadratzahl, dann ist auch die dritte eine Quadratzahl.

VIII.23.

Stehen vier Zahlen in fortlaufend gleicher Proportion und ist die erste eine Kubikzahl, dann ist auch die vierte eine Kubikzahl.

VIII.24.

Ist das Verhältnis zweier Zahlen wie das zweier Quadratzahlen und ist die erste eine Quadratzahl, dann ist auch die andere eine Quadratzahl.

VIII.25.

Ist das Verhältnis zweier Zahlen wie das zweier Kubikzahlen und ist die erste eine Kubikzahl, dann ist auch die andere eine Kubikzahl.

VIII.26.

Ein Produkt steht zu einem ähnlichen Produkt in einem Verhältnis wie die Quadratzahlen aus ihrer fortlaufend gleichen Proportion in kleinstmöglichen Zahlen.

VIII.27.

Ein Produkt dreier Faktoren steht zu einem ähnlichen Produkt in einem Verhältnis wie die Kubikzahlen aus ihrer fortlaufend gleichen Proportion in kleinstmöglichen Zahlen.

Buch IX.

IX.1.

Das Produkt ähnlicher Produkte ist eine Quadratzahl.

IX.2.

Zwei Zahlen, deren Produkt eine Quadratzahl ist, sind ähnliche Produkte.

IX.3.

Eine Kubikzahl mit sich multipliziert ergibt eine Kubikzahl.

IX.4.

Das Produkt zweier Kubikzahlen ist eine Kubikzahl.

IX.5.

Eine Zahl, die mit einer Kubikzahl multipliziert eine Kubikzahl ergibt, ist eine Kubikzahl.

IX.6.

Eine Zahl, die mit sich multipliziert eine Kubikzahl ergibt, ist eine Kubikzahl.

IX.7.

Die Multiplikation eines Produktes mit einer beliebigen Zahl ergibt stets ein Produkt aus drei Faktoren.

IX.8.

In einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, ist das dritte Glied und jedes darauf mit einem Glied Abstand folgende eine Quadratzahl, ist das vierte Glied und jedes darauf mit zwei Gliedern Abstand folgende eine Kubikzahl und ist das siebte Glied und jedes darauf mit fünf Gliedern Abstand folgende Quadrat- und Kubikzahl zugleich.

IX.9.

Ist in einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, das auf die Eins folgende Glied eine Quadratzahl, dann sind alle folgenden Glieder Quadratzahlen, ist es eine Kubikzahl, dann sind alle folgenden Glieder Kubikzahlen.

IX.10.

Ist in einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, das auf die Eins folgende Glied keine Quadratzahl, dann sind keine anderen Glieder Quadratzahlen, als das dritte und die darauf mit einem Glied Abstand folgenden, und ist das auf die Eins folgende Glied keine Kubikzahl, dann sind keine anderen Glieder Kubikzahlen, als das vierte und die darauf mit zwei Gliedern Abstand folgenden.

IX.11.

In einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, ist jedes größere Glied so oft Vielfache eines kleineren Glieds wie eines der kleineren Glieder angibt.

IX.12.

Eine Primzahl, die Teiler des letzten Glieds einer fortlaufend gleichen Proportion ist, deren erstes Glied die Eins ist, ist auch Teiler des Glieds, das auf die Eins folgt.

IX.13.

Ist in einer fortlaufend gleichen Proportion, deren erstes Glied die Eins ist, das auf die Eins folgende Glied eine Primzahl, dann hat das letzte Glied keine anderen Teiler als die Zahlen, die in der Proportion vor ihm stehen.

IX.14.

Das kleinste Produkt aus Primzahlen hat keine anderen Teiler als diese Primzahlen.

IX.15.

Von drei Zahlen einer fortlaufend gleichen Proportion in kleinstmöglichen Zahlen, ist die Summe zweier beliebiger Glieder teilerfremd zum dritten Glied.

IX.16.

Sind zwei Zahlen teilerfremd, gibt es keine Zahl, die zur zweiten Zahl im gleichen Verhältnis steht wie die erste zur zweiten.

IX.17.

Sind das erste und das letzte Glied einer fortlaufend gleichen Proportion teilerfremd, gibt es keine Zahl, die zum letzten Glied im gleichen Verhältnis steht wie das erste zum zweiten.

IX.18.

Zu zwei Zahlen, wenn möglich, die dritte Zahl zur fortlaufend gleichen Proportion finden.

IX.19.

Zu drei Zahlen, wenn möglich, die vierte Zahl finden, zu der sich die dritte verhält wie die erste zur zweiten.

IX.20.

Die Anzahl der Primzahlen ist größer als jede Zahl, die vorgelegt wird.

IX.21.

Die Summe gerader Zahlen ist gerade.

IX.22.

Die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade.

IX.23.

Die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.

IX.24.

Wird von einer geraden Zahl eine gerade Zahl subtrahiert, ist der Rest gerade.

IX.25.

Wird von einer geraden Zahl eine ungerade Zahl subtrahiert, ist der Rest ungerade.

IX.26.

Wird von einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl subtrahiert, ist der Rest gerade.

IX.27.

Wird von einer ungeraden Zahl eine gerade Zahl subtrahiert, ist der Rest ungerade.

IX.28.

Das Produkt einer ungeraden Zahl mit einer geraden ist gerade.

IX.29.

Das Produkt ungerader Zahlen ist ungerade.

IX.30.

Ist eine gerade Zahl Vielfache einer ungeraden Zahl, dann ist auch ihre Hälfte Vielfache der ungeraden Zahl.

IX.31.

Ist eine ungerade Zahl teilerfremd zu einer andern, dann ist sie auch teilerfremd zu deren Doppeltem.

IX.32.

Keine, von der Zahl Zwei ausgehend, durch fortgesetzte Verdopplung sich ergebende Zahl ist gerademal ungerade.

IX.33.

Keine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist gerademal gerade.

IX.34.

Ergibt sich eine gerade Zahl, deren Hälfte gerade ist, nicht durch fortgesetzte Verdopplung von der Zwei ausgehend, dann ist sie gerademal gerade und gerademal ungerade.

IX.35.

Wird vom zweiten und vom letzten Glied einer fortlaufend gleichen Proportion eine Zahl gleich dem ersten Glied subtrahiert, dann verhält sich der Rest des zweiten zum ersten Glied wie der Rest des letzten Glieds zur Summe aus den übrigen Gliedern.

IX.36.

Ist die Summe der Zahlen, die sich, beginnend mit der Eins, durch fortgesetzte Verdopplung ergeben, eine Primzahl, dann ist das Produkt aus dieser Summe mit der letzten dieser Zahlen eine vollkommene Zahl.

Buch X. 1.Teil.

X.1.

Wird von der größeren von zwei ungleichen Größen mehr als die Hälfte weggenommen und vom Rest wiederum mehr als die Hälfte und wird dieses fortgesetzt, dann wird sich ein Rest ergeben, der kleiner als die kleinere der beiden Größen ist.

X.2.

Wird von zwei ungleiche Größen immer wieder die kleinere von der größeren weggenommen, und bleibt kein Rest, der Teiler des ihm vorhergehenden ist, dann sind die beiden Größen inkommensurabel.

X.3.

Zu zwei kommensurablen Größen die größte gemeinsame Maßeinheit finden.

X.4.

Zu drei kommensurablen Größen die größte gemeinsame Maßeinheit finden.

X.5.

Kommensurable Größen stehen in einem gleichen Verhältnis wie Zahlen.

X.6.

Größen, die in einem gleichen Verhältnis stehen wie Zahlen, sind kommensurabel.

X.7.

Inkommensurable Größen stehen nicht in einem Verhältnis zueinander wie Zahlen.

X.8.

Stehen Größen nicht in einem Verhältnis zueinander wie Zahlen, sind sie inkommensurabel.

X.9.

Sind Strecken der Länge nach kommensurabel, dann verhalten sich die Quadrate über ihnen wie Quadratzahlen, und verhalten sich Quadrate wie Quadratzahlen, dann sind ihre Seiten der Länge nach kommensurabel.

Sind Strecken der Länge nach inkommensurabel, dann stehen die Quadrate über ihnen zueinander nicht in einem Verhältnis wie Quadratzahlen, und stehen Quadrate zueinander nicht in einem Verhältnis wie Quadratzahlen, dann sind ihre Seiten der Länge nach inkommensurabel.

X.10.

Stehen vier Größen in Proportion und sind die erste und die zweite kommensurabel, dann sind es auch die dritte und die vierte und sind die erste und die zweite Größe inkommensurabel, dann sind es auch die dritte und die vierte.

X.11.

Zu einer Strecke eine der Länge nach inkommensurable Strecke und eine andere, der Länge nach und im Quadrat inkommensurable, Strecke finden.

X.12.

Die Größen, die zu einer Größe kommensurabel sind, sind kommensurabel.

X.13.

Ist eine von zwei Größen zu einer weiteren kommensurabel, die andere jedoch inkommensurabel, dann sind die beiden Größen zueinander inkommensurabel.

X.14.

Ist von zwei kommensurablen Größen eine zu einer dritten Größe inkommensurabel, dann ist auch die andere zu ihr inkommensurabel.

Lemma X.15.

Zu zwei ungleichen Strecken das Quadrat finden um das das Quadrat über der einen größer ist als das Quadrat über der anderen.

X.15.

Ist bei vier Strecken in Proportion das Quadrat über der ersten um ein Quadrat größer als das Quadrat über der zweiten, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur ersten Strecke ist, dann ist auch das Quadrat über der dritten um eine Quadrat größer als das Quadrat über der vierten, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur dritten Strecke ist.

Ist dagegen das Quadrat über der ersten um ein Quadrat größer als das Quadrat über der zweiten, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zur ersten Strecke ist, dann ist auch das Quadrat über der dritten Strecke um ein Quadrat größer als das Quadrat über der vierten, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zur dritten Strecke ist.

X.16.

Werden zwei kommensurable Strecken zusammengesetzt, ist die ganze Strecke zu jeder von beiden kommensurabel, und ist eine aus zwei Strecken zusammengesetzte Strecke zu einer der beiden kommensurabel, dann sind die beiden Strecken kommensurabel.

X.17.

Werden zwei inkommensurable Strecken zusammengesetzt, ist die ganze Strecke zu jeder von beiden inkommensurabel, und ist eine aus zwei Strecken zusammengesetzte Strecke zu einer der beiden inkommensurabel, dann sind die beiden Strecken inkommensurabel.

Lemma X.18.

Wird von einem Rechteck das Quadrat über einer Seite abgeteilt, dann ist das übrige Rechteck gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der geteilten Seite.

X.18.

Wird bei zwei ungleichen Strecken durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat gleich einem Viertel des Quadrats über der kleineren ist, die größere Strecke in der Länge nach kommensurable Teile geteilt, dann ist das Quadrat über der größere Strecke um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zu ihr ist, größer als das Quadrat über der kleineren.

Ist das Quadrat über der größeren von zwei ungleichen Strecken um ein Quadrat, dessen Seite kommensurabel zur größeren Strecke ist, größer als das Quadrat über der kleineren, dann wird durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über der kleineren gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach kommensurable Teile geteilt.

X.19.

Wird bei zwei ungleichen Strecken durch Abteilen des Quadrats über einer Seite eines Rechtecks über der größeren Strecke, das verringert um das abgeteilte Quadrat gleich einem Viertel des Quadrats über der kleineren ist, die größere Strecke in zwei der Länge nach inkommensurable Teile geteilt, dann ist das Quadrat über der größere Strecke um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach inkommensurabel zu ihr ist, größer als das Quadrat über der kleineren.

Ist das Quadrat über der größeren von zwei ungleichen Strecken um ein Quadrat, dessen Seite inkommensurabel zur größeren Strecke ist, größer als das Quadrat über der kleineren dann wird durch Abteilen des Quadrats über einer Seite vom Rechteck über der größeren, das verringert um das abgeteilte Quadrat einem Viertel des Quadrats über der kleineren gleich ist, die geteilte Strecke in der Länge nach inkommensurable Teile geteilt.

Lemma X.20.

Wie gezeigt, sind alle der Länge nach kommensurablen Strecken auch im Quadrat kommensurabel, aber nicht alle im Quadrat kommensurablen Strecken sind auch kommensurabel der Länge nach, sondern können der Länge nach kommensurabel oder inkommensurabel sein.

Deshalb sind rationale Strecken, der Länge nach und im Quadrat kommensurabel, und sind Strecken, die im Quadrat kommensurabel, der Länge nach aber inkommensurabel sind, quadriert rational.

X.20.

Ein Rechteck aus den kommensurablen Seiten rationaler oder quadriert rationaler Länge ist rational.

X.21.

Wird auf einer rationalen oder quadriert rationalen Strecke ein rationales Rechteck errichtet, dann sind seine Länge und Breite der Länge nach kommensurabel.

X.22.

Ein Rechteck aus quadriert rationalen Strecken, die nur im Quadrat kommensurabel sind, ist irrational; die Seite des Quadrats, das ihm gleich ist, hat eine irrationale Länge, die biquadriert rational genannt wird.

Lemma X.23.

Die erste von zwei Strecken verhält sich zur zweiten wie das Quadrat über der ersten zum Rechteck aus den beiden Strecken.

X.23.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das einem Quadrat über einer biquadriert rationalen Strecke gleich ist, dann sind seine Seiten der Länge nach inkommensurabel.

X.24.

Ist eine biquadriert rationale Strecke zu einer anderen kommensurabel, dann ist sie biquadriert rational.

Lemma X.25.

Entsprechend, wie für quadriert rationale Strecken [Lemma X.19.] erklärt, sind nicht alle Strecken, die im Biquadrat kommensurabel sind, auch im Quadrat kommensurabel, wie diese nicht alle der Länge nach kommensurabel sind, aber alle Strecken, die der Länge nach kommensurabel sind, da auch im Quadrat kommensurabel, sind auch im Biquadrat kommensurabel.

Ist eine Strecke der Länge nach kommensurabel zu einer irrationalen Strecke, dann ist sie auch im Quadrat und im Biquadrat zu ihr kommensurabel, ist sie aber nur im Quadrat zu ihr kommensurabel, dann auch im Biquadrat.

X.25.

Ein Rechteck aus biquadriert rationalen Strecken, die der Länge nach kommensurabel sind, ist quadriert rational.

X.26.

Ein Rechteck aus biquadriert rationalen Strecken, die nur im Quadrat kommensurabel sind, ist entweder rational oder quadriert rational.

X.27.

Eine quadriert rationale Größe ist nicht um eine rationale Größe größer als eine andere quadriert rationale.

X.28.

Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben.

X.29.

Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

Lemma X.30.1

Zwei Quadratzahlen finden, deren Summe eine Quadratzahl ist.

Lemma X.30.2

Zwei Quadratzahlen finden, deren Summe keine Quadratzahl ist.

X.30.

Zwei im Quadrat kommensurable Strecken finden, deren größere im Quadrat um ein Quadrat über einer zu ihr der Länge nach kommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über der kleineren.

X.31.

Zwei im Quadrat kommensurable Strecken finden, deren größere im Quadrat um ein Quadrat über einer zu ihr der Länge nach inkommensurablen Strecke größer ist als das Quadrat über der kleineren.

X.32.

Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben, so dass das Quadrat über der größeren um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur größeren ist, größer ist als das Quadrat über der kleineren.

X.33.

Zwei biquadriert rationale Strecken finden, die nur im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben, so dass das Quadrat über der größeren um ein Quadrat, dessen Seite der Länge nach kommensurabel zur größeren ist, größer ist als das Quadrat über der kleineren.

Lemma X.34.

Wird im Dreieck ABC mit rechtem Winkel in A die Senkrechte AD errichtet,
dann, sage ich,
ist das Rechteck aus CB mit BD gleich dem Quadrat über BA,
ist das Rechteck aus BC mit CD gleich dem Quadrat über CA,
ist das Rechteck aus BD mit DC gleich dem Quadrat über AD und
ist das Rechteck aus BC mit AD gleich dem Rechteck aus BA mit AC.

X.34.

Zwei im Quadrat inkommensurable Strecken finden, deren Summe der Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

X.35.

Zwei im Quadrat inkommensurable Strecken finden, deren Summe der Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben.

X.36.

Zwei im Quadrat inkommensurable Strecken finden, deren Summe der Quadrate quadriert rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist.

Buch X. 2.Teil.

X.37.

Werden zwei nur im Quadrat kommensurable Strecken zusammengesetzt, dann ist die ganze Strecke irrational und wird eine binomische Strecke genannt.

X.38.

Werden zwei biquadriert rationale Strecken zusammengesetzt, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird binomisch primär irrational genannt.

X.39.

Werden zwei biquadriert rationale Strecken zusammengesetzt, die im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird binomisch sekundär irrational genannt.

X.40.

Werden zwei im Quadrat inkommensurable Strecken zusammengesetzt, deren Summe ihrer Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird konjugiert binomisch genannt.

X.41.

Werden zwei im Quadrat inkommensurable Strecken zusammengesetzt, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird konjugiert binomisch primär irrational genannt.

X.42.

Werden zwei im Quadrat inkommensurable Strecken zusammengesetzt, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein, zu ihr inkommensurables, quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die ganze Strecke irrational und wird konjugiert binomisch sekundär irrational genannt.

Lemma X.43.

Wird eine Strecke AB in C und auch in D in jeweils zwei ungleiche Teile so geteilt, dass AC größer als DB ist, dann, sage ich, ist die Summe der Quadrate über AC und CB größer als die Summe der Quadrate über AD und DB.

X.43.

Eine binomische Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, die im Quadrat kommensurabel sind.

X.44.

Eine binomisch primär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in biquadriert rationale Strecken aufteilen, die im Quadrat kommensurabel sind und ein rationales Rechteck ergeben.

X.45.

Eine binomisch sekundär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in biquadriert rationale Strecken aufteilen, die im Quadrat kommensurabel sind und ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

X.46.

Eine konjugiert binomische Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate rational ist und die ein quadriert rationales Rechteck ergeben.

X.47.

Eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein rationales Rechteck ergeben.

X.48.

Eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke lässt sich nur in einem Punkt in Strecken aufteilen, deren Summe ihrer Quadrate quadriert rational ist und die ein, zu ihr inkommensurables, quadriert rationales Rechteck ergeben.

Lemma X.49.
Unterteilung der quadriert binomischen Strecken.

X.49.

Eine quadriert binomische Strecke erster Art finden.

X.50.

Eine quadriert binomische Strecke zweiter Art finden.

X.51.

Eine quadriert binomische Strecke dritter Art finden.

X.52.

Eine quadriert binomische Strecke vierter Art finden.

X.53.

Eine quadriert binomische Strecke fünfter Art finden.

X.54.

Eine quadriert binomische Strecke sechster Art finden.

Lemma X.55.

Werden zwei Quadrate AB, BC so aneinandergelegt, dass jeweils die Seiten DB und BE und die Seiten FB und BG auf einer Geraden liegen und wird das Parallelogramm AC vervollständigt, dann, sage ich, ist AC ein Quadrat und verhält sich DG zu AB, BC und verhält sich DC zu AC, CB wie die mittlere Größe in fortlaufend gleicher Proportion.

X.55.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke erster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer binomischen Strecke.

X.56.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke zweiter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch primär irrational ist.

X.57.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomische Strecke dritter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, binomisch sekundär irrational ist.

X.58.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke vierter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch ist.

X.59.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke fünfter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch primär irrational ist.

X.60.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert binomischen Strecke sechster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich einem Quadrat, dessen Seite, wie benannt, konjugiert binomisch sekundär irrational ist.

Lemma X.61.

Wird eine Strecke in ungleiche Teile geteilt, dann ist die Summe ihrer Quadrate größer als das doppelte Rechteck, das sie ergeben.

X.61.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer binomischen Strecke gleich ist, ist seine Breite eine quadriert binomische Strecke erster Art.

X.62.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer binomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine Breite eine quadriert binomische Strecke zweiter Art.

X.63.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer binomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine Breite eine quadriert binomische Strecke dritter Art.

X.64.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert binomischen Strecke gleich ist, ist seine Breite eine quadriert binomische Strecke vierter Art.

X.65.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine Breite eine quadriert binomische Strecke fünfter Art.

X.66.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine Breite eine quadriert binomische Strecke sechster Art.

X.67.

Eine Strecke, die zu einer binomischen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine quadriert binomische Strecke gleicher Art.

X.68.

Eine Strecke, die zu einer binomisch primär oder sekundär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist ebenso binomisch primär oder sekundär irrational.

X.69.

Eine Strecke, die zu einer konjugiert binomischen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine konjugiert binomische Strecke.

X.70.

Eine Strecke, die zu einer konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine konjugiert binomisch primär irrationale Strecke.

X.71.

Eine Strecke, die zu einer konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine konjugiert binomisch sekundär irrationale Strecke.

X.72.

Eine rationale und eine quadriert rationale Fläche zusammen sind gleich dem Quadrat über einer von vier verschiedenen binomischen Strecken, der binomischen und der binomisch primär irrationalen, der konjugiert binomischen und der konjugiert binomisch primär irrationalen Strecke.

X.73.

Zwei quadriert rationale Flächen zusammen sind gleich einem Quadrat über einer von zwei verschiedenen binomischen Strecken, der binomisch sekundär irrationalen und der konjugiert binomisch sekundär irrationalen Strecke.

Buch X. 3.Teil.

X.74.

Wird von einer rationalen oder quadriert rationalen Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr nur im Quadrat kommensurabel ist, dann ist die restliche Strecke irrational und wird apotomisch genannt.

X.75.

Wird von einer biquadriert rationalen Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein rationales Rechteck ergibt, dann ist die restliche Strecke irrational und wird apotomisch primär irrational genannt.

X.76.

Wird von einer biquadriert rationalen Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt, dann ist die restliche Strecke irrational und wird apotomisch sekundär irrational genannt.

X.77.

Wird von einer Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über den beiden Strecken rational ist und die beiden Strecken ein quadriert rationales Rechteck ergeben, dann ist die restliche Strecke irrational und wird konjugiert apotomisch genannt.

X.78.

Wird von einer Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über den beiden Strecken quadriert rational ist und die beiden Strecken ein rationales Rechteck ergeben, dann ist die restliche Strecke irrational und wird konjugiert apotomisch primär irrational genannt.

X.79.

Wird von einer Strecke eine Strecke weggenommen, die zu ihr im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über den beiden Strecken quadriert rational ist und die beiden Strecken ein quadriert rationales Rechteck ergeben, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist, dann ist die restliche Strecke irrational und wird konjugiert apotomisch sekundär irrational genannt.

X.80.

Zu jeder apotomischen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist.

X.81.

Zu jeder apotomisch primär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein rationales Rechteck ergibt.

X.82.

Zu jeder apotomisch sekundär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat kommensurabel ist und mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt.

X.83.

Zu jeder konjugiert apotomischen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe ihrer Quadrate rational und das sich mit ihr ergebende Rechteck quadriert rational ist.

X.84.

Zu jeder konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe ihrer Quadrate quadriert rational und das sich mit ihr ergebende Rechteck rational ist.

X.85.

Zu jeder konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke gibt es nur eine ergänzende Strecke, die zur ganzen Strecke im Quadrat inkommensurabel ist, wobei die Summe der Quadrate über ihnen quadriert rational ist und sie mit ihr ein quadriert rationales Rechteck ergibt, das zur Summe der Quadrate inkommensurabel ist.

Lemma X.86.
Unterteilung der quadriert apotomischen Strecken.

X.86.

Eine quadriert apotomische Strecke erster Art finden.

X.87.

Eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art finden.

X.88.

Eine quadriert apotomische Strecke dritter Art finden.

X.89.

Eine quadriert apotomische Strecke vierter Art finden.

X.90.

Eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art finden.

X.91.

Eine quadriert apotomische Strecke sechster Art finden.

X.92.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke erster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer apotomischen Strecke.

X.93.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke zweiter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke.

X.94.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke dritter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke.

X.95.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke vierter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke.

X.96.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke fünfter Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke.

X.97.

Das von einer rationalen Strecke und einer quadriert apotomischen Strecke sechster Art eingeschlossene Rechteck ist gleich dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke.

X.98.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer apotomischen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke erster Art.

X.99.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer apotomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke zweiter Art.

X.100.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke dritter Art.

X.101.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert apotomischen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke vierter Art.

X.102.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke fünfter Art.

X.103.

Wird auf einer rationalen Strecke ein Rechteck errichtet, das dem Quadrat über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke gleich ist, ist seine andere Seite eine quadriert apotomische Strecke sechster Art.

X.104.

Eine Strecke, die zu einer apotomischen Strecke der Länge nach kommensurabel ist, ist eine quadriert apotomische Strecke gleicher Art.

X.105.

Eine Strecke, die entweder zu einer apotomisch primär oder zu einer apotomisch sekundär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist ebenfalls entweder apotomisch primär oder apotomisch sekundär irrational.

X.106.

Eine Strecke, die zu einer konjugiert apotomischen Strecke kommensurabel ist, ist konjugiert apotomisch.

X.107.

Eine Strecke, die zu einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist konjugiert apotomisch primär irrational.

X.108.

Eine Strecke, die zu einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke kommensurabel ist, ist konjugiert apotomisch sekundär irrational.

X.109.

Wird von einem rationalen Rechteck ein quadriert rationales Rechteck weggenommen, ist das restliche Rechteck irrational und gleich dem Quadrat entweder über einer apotomischen oder über einer konjugiert apotomischen Strecke.

X.110.

Wird von einem quadriert rationalen Rechteck ein rationales Rechteck weggenommen, dann ist das restliche Rechteck irrational und gleich dem Quadrat entweder über einer apotomisch primär irrationalen oder über einer konjugiert apotomisch primär irrationalen Strecke.

X.111.

Wird von einem quadriert rationalen Rechteck ein dazu inkommensurables, quadriert rationales Rechteck weggenommen, dann ist das restliche Rechteck irrational und gleich dem Quadrat entweder über einer apotomisch sekundär irrationalen oder über einer konjugiert apotomisch sekundär irrationalen Strecke.

X.112.

Eine apotomische Strecke ist keiner binomischen Strecke gleich.

X.113.

Ist die eine Seite eines rationales Rechtecks eine binomische Strecke, dann ist die andere Seite eine apotomische Strecke, die als quadriert apotomische Strecke von der gleichen Art ist wie die andere als quadriert binomische Strecke, wobei ihre Teilstrecken zueinander kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen.

X.114.

Ist die eine Seite eines rationales Rechtecks eine apotomische Strecke, dann ist die andere Seite eine binomische Strecke, die als quadriert binomische Strecke von der gleichen Art ist wie die andere als quadriert apotomische Strecke, wobei ihre Teilstrecken zueinander kommensurabel sind und im gleichen Verhältnis stehen.

X.115.

Ein Rechteck aus einer apotomischen Strecke mit einer binomischen Strecke, deren eine Teilstrecken kommensurabel zu den Teilstrecken der anderen sind und in gleichen Verhältnissen stehen, ist rational.

X.116.

Von einer quadriert rationalen Strecke ausgehend können unbegrenzt viele irrationale Strecken gebildet werden, die ihr und einander nicht gleichen.

X.117.

Die Diagonale eines Quadrats ist zur Seite der Länge nach inkommensurabel.

Buch XI.

XI.1.

Eine Gerade liegt in einer Ebene und nicht zum Teil nicht in ihr.

XI.2.

Zwei Gerade, deren eine die andere schneidet, liegen in einer Ebene und es liegen alle Dreiecke jeweils in einer Ebene.

XI.3.

Zwei Ebenen, deren eine die andere schneidet, schneiden sich in einer Geraden, die beiden gemeinsam ist.

XI.4.

Bildet eine Gerade mit zwei Geraden in ihrem Schnittpunkt rechte Winkel, dann steht sie senkrecht zur Ebene, in der die Geraden liegen.

XI.5.

Drei Gerade, in deren gemeinsamen Schnittpunkt eine Senkrechte errichtet ist, liegen in derselben Ebene.

XI.6.

Zwei zur selben Ebene senkrechte Gerade sind parallel.

XI.7.

Die Gerade durch zwei beliebige Punkte auf Parallelen liegt in der Ebene der Parallelen.

XI.8.

Steht eine von zwei Parallelen senkrecht zu einer Ebene, dann steht auch die andere senkrecht zu derselben Ebene.

XI.9.

Gerade sind parallel, die einer anderen parallel sind, auch wenn sie nicht mit ihr in derselben Ebene liegen.

XI.10.

Zwei sich schneidende Gerade, die schneidenden Geraden einer anderen Ebene parallel sind, bilden gleiche Winkel.

XI.11.

Auf einer Ebene die Senkrechte durch einen nicht in ihr liegenden Punkt errichten.

XI.12.

An einem Punkt einer Ebene die Senkrechte errichten.

XI.13.

Durch denselben Punkt einer Ebene können nicht zwei Senkrechte gezogen werden.

XI.14.

Ebenen, zu denen dieselbe Gerade senkrecht steht, sind parallel.

XI.15.

Sind zwei sich schneidende Gerade einer Ebene den Geraden einer anderen Ebene parallel, dann sind die Ebenen parallel.

XI.16.

Die Schnittgeraden in parallelen Ebenen, die von einer Ebene geschnitten werden, sind parallel.

XI.17.

Die Abschnitte der Geraden, die von parallelen Ebenen geschnitten werden, stehen im gleichen Verhältnis.

XI.18.

Die Ebenen, in denen eine Senkrechte zu einer Ebene liegt, stehen senkrecht zu dieser Ebene.

XI.19.

Die Schnittgerade von Ebenen, die senkrecht zu einer Ebene stehen, steht senkrecht zu dieser Ebene.

XI.20.

Im Raumwinkel, der von drei ebenen Winkeln gebildet wird, sind je zwei Winkel zusammen größer als der dritte.

XI.21.

Die ebenen Winkel, die einen Raumwinkel bilden, sind zusammen kleiner als vier rechte Winkel.

XI.22.

Drei Strecken über denen ebene Winkel errichtet sind, von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte und die jeweils von gleichen Strecken eingeschlossen werden, sind den Seiten eines Dreiecks gleich.

Lemma XI.23.

Zu zwei gegebenen Strecken diejenige finden, die um das Quadrat der einen kleiner ist als das Quadrat der anderen.

XI.23.

Aus drei ebenen Winkel, die zusammen kleiner als vier rechte Winkel sind und von denen je zwei zusammen größer sind als der dritte, einen Raumwinkel bilden.

XI.24.

Die gegenüberliegenden Flächen eines Körpers, der in Länge, Breite und Höhe zwischen parallelen Ebenen liegt, sind gleiche und ähnliche Parallelogramme.

XI.25.

Von den durch eine, zu einer der gegenüberliegenden Flächen eines parallelepipeden Körpers parallelen, schneidende Ebene abgeteilten Körpern verhält sich einer zum andern wie seine Grundfläche zur andern.

XI.26.

An einer Geraden in einem gegebenen Punkt einen Raumwinkel anlegen, der einem gegebenen gleich ist.

XI.27.

An einer Strecke ein Parallelepiped, das einem gegebenen ähnlich ist, ähnlich errichten.

XI.28.

Ein Parallelepiped, das von einer Ebene geschnitten wird, in der die Diagonalen zweier gegenüberliegender Flächen liegen, wird dadurch in zwei gleiche Teile geteilt.

XI.29.

Parallelepipede derselben Grundfläche und Höhe, deren Kanten dieselben Geraden schneiden, sind gleich.

XI.30.

Parallelepipede derselben Grundfläche und Höhe, deren Kanten nicht dieselben Geraden schneiden, sind gleich.

XI.31.

Parallelepipede gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

XI.32.

Gleich hohe Parallelepipede stehen im gleichen Verhältnis wie ihre Grundflächen.

XI.33.

Ähnliche Parallelepipede stehen im gleichen Verhältnis wie Kuben über entsprechenden ihrer Kanten.

XI.34.

Die Grundflächen gleicher Parallelepipede stehen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und Parallelepipede, der Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen, sind gleich.

XI.35.

Die Winkel, die von Geraden gebildet werden, die jeweils über zwei einen gleichen Winkel bildenden Geraden durch deren Schnittpunkt verlaufen und mit ihnen gleiche Winkel einschließen, mit den Geraden durch ihre Schnittpunkte und die Fußpunkte der Senkrechten in beliebigen ihrer Punkte zu den Ebenen, in denen jene Geraden liegen, sind gleich.

XI.36.

Das Parallelepiped, dessen Kanten gleich drei Strecken sind, die in fortlaufend gleicher Proportion stehen, ist gleich dem gleichseitigen Parallelepiped mit den gleichen Winkeln, dessen Kanten gleich der mittleren Strecke sind.

XI.37.

Vier ähnliche und ähnlich errichtete parallelepipede Körper, deren Kanten vier Strecken gleich sind, die in Proportion stehen, stehen in Proportion und die Strecken, die den Kanten von vier ähnlichen und ähnlich errichteten, in Proportion stehenden parallelepipeden Körpern gleich sind, stehen in Proportion.

XI.38.

Werden die gegenüberliegenden Seiten eines Würfels von schneidenden Ebenen jeweils in zwei gleiche Teile geteilt, dann wird die Diagonale des Würfels von den Ebenen und wird die Schnittgerade der Ebenen von der Diagonalen in zwei gleiche Teile geteilt.

XI.39.

Zwei Prismen gleicher Höhe, wovon das eine ein Parallelogramm und das andere ein Dreieck zur Grundfläche hat, wobei das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks ist, sind gleich.

Buch XII.

XII.1.

Ähnliche Polygone, die einem Kreis einbeschrieben sind, stehen im Verhältnis der Quadrate über den Durchmessern der Kreise.

XII.2.

Kreise stehen im Verhältnis der Quadrate über ihren Durchmessern.

XII.3.

Jede Pyramide auf dreieckiger Grundfläche lässt sich in zwei gleiche, der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen aufteilen, die zusammen größer als die Hälfte der Pyramide sind.

XII.4.

Werden zwei gleich hohe Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche jeweils in zwei gleiche, der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwei gleiche Prismen aufgeteilt, dann verhält sich die Grundfläche der einen Pyramide zur Grundfläche der anderen wie alle Prismen zusammen in der einen zu allen Prismen zusammen in der anderen Pyramide auch dann, wenn die Aufteilung der aufgeteilten Pyramiden auf gleiche Weise fortgesetzt wird.

XII.5.

Gleich hohe Pyramiden auf dreieckiger Grundfläche stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen.

XII.6.

Pyramiden gleicher Höhe, deren Grundflächen Polygone sind, stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen.

XII.7.

Jedes Prisma ist in drei gleiche Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche aufteilbar.

XII.8.

Ähnliche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen stehen im Verhältnis der Kuben über entsprechenden Kanten.

XII.9.

Die Grundflächen gleicher Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen stehen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und die Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen, deren Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen, sind gleich.

XII.10.

Jeder Kegel ist dem Drittel eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

XII.11.

Sowohl Kegel wie Zylinder gleicher Höhe stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen.

XII.12.

Sowohl ähnliche Kegel wie ähnliche Zylinder stehen im Verhältnis der Kuben über den Durchmessern ihrer Grundflächen.

XII.13.

Wird ein Zylinder von einer schneidenden, zu den Grundflächen parallelen Ebene geteilt, dann stehen die abgeteilten Achsen im Verhältnis der abgeteilten Zylinder.

XII.14.

Sowohl Kegel wie Zylinder mit gleichen Grundflächen stehen im Verhältnis ihrer Höhen.

XII.15.

Die Grundflächen gleicher Kegel und gleicher Zylinder stehen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen und Kegel und Zylinder, deren Grundflächen im umgekehrten Verhältnis ihrer Höhen stehen, sind gleich.

XII.16.

In den größeren von zwei Kreisen um denselben Mittelpunkt ein Polygon gerader Seitenzahl einbeschreiben, das den kleineren nicht berührt.

XII.17.

In die größere von zwei Kugeln um denselben Mittelpunkt ein Polyeder einbeschreiben, das die kleinere nicht berührt.

XII.18.

Kugeln stehen im Verhältnis der Kuben über ihren Durchmessern.

Buch XIII.

XIII.1.

Das Quadrat über der Strecke aus dem größeren Teil einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit der Hälfte der Strecke ist gleich dem fünffachen Quadrat über der Hälfte der Strecke.

XIII.2.

Ist das Quadrat über einer Strecke gleich dem fünffachen Quadrat über einem ihrer Abschnitte, dann ist der andere Abschnitt gleich dem größerem Teil der in stetiger Teilung geteilten doppelten Strecke.

XIII.3.

Das Quadrat über der Strecke aus dem kleineren Teil einer in stetiger Teilung geteilten Strecke und der Hälfte des größeren Teiles zusammen ist gleich dem fünffachen Quadrat über der Hälfte der größeren Strecke.

XIII.4.

Das Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil ist gleich dem dreifachen Quadrat über dem größeren Teil.

XIII.5.

Eine nach stetiger Teilung geteilte Strecke zusammen mit ihrem größeren Teil ist der größere Teil der zusammengesetzten Strecke nach stetiger Teilung geteilt.

XIII.6.

Die Teile einer Strecke rationaler oder quadriert rationaler Länge, die in stetiger Teilung geteilt ist, sind irrational und zwar apotomisch.

XIII.7.

Ein gleichseitiges Fünfeck, in dem drei Winkel, nebeneinanderliegend oder nicht, gleich sind, ist gleichwinklig.

XIII.8.

Die Sehnen unter zwei nebeneinanderliegenden Winkeln eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks schneiden sich in stetiger Teilung, wobei die größeren Teile den Seiten des Fünfecks gleich sind.

XIII.9.

Die Seiten eines demselben Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Sechsecks und eines gleichseitigen Zehnecks zusammen ergeben eine Strecke, die in stetiger Teilung geteilt ist, wobei die Seite des Sechsecks der größere Teil ist.

XIII.10.

Das Quadrat über der Seite eines in einen Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Fünfecks ist gleich den Quadraten über den Seiten des diesem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Sechsecks und des ihm einbeschriebenen gleichseitigen Zehnecks zusammen.

XIII.11.

Die Seite eines gleichseitigen Fünfecks, das einem Kreis mit rationalem oder quadriert rationalem Durchmesser einbeschrieben ist, ist konjugiert apotomisch.

XIII.12.

Das Quadrat über der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, das einem Kreis einbeschrieben ist, ist gleich dem dreifachen Quadrat über dem Radius.

XIII.13.

Ein Tetraeder einer Kugel mit gegebenem Durchmesser einbeschreiben.
Das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel ist dann gleich dem einundeinhalbfachen Quadrat über der Kante des Tetraeders.

XIII.14.

Ein Oktaeder einer Kugel mit gegebenem Durchmesser einbeschreiben.
Das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel ist dann gleich dem doppelten Quadrat über der Kante des Oktaeders.

XIII.15.

Einen Würfel einer Kugel mit gegebenem Durchmesser einbeschreiben.
Das Quadrat über dem Durchmesser der Kugel ist dann gleich dem dreifachen Quadrat über der Kante des Würfels.

XIII.16.

Ein Ikosaeder einer Kugel mit gegebenem rationalem oder quadriert rationalem Durchmesser einbeschreiben.
Die Kante des Ikosaeders ist dann irrational und zwar konjugiert apotomisch.

XIII.17.

Ein Dodekaeder einer Kugel mit gegebenem rationalem oder quadriert rationalem Durchmesser einbeschreiben.
Die Kante des Dodekaeders ist dann irrational und zwar apotomisch.

XIII.18.

Die Kanten der fünf verschiedenen Polyeder, die Kugeln mit gleichem Durchmesser einbeschrieben sind, darstellen und vergleichen.

Zusatz XIII.18:

Außer den fünf erwähnten Körpern kann kein Polyeder konstruiert werden, das von gleichen, gleichseitigen und gleichwinkligen Flächen begrenzt wird.

Lemma XIII.18.

Der Winkel eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks ist gleich einem und einem Fünftel eines rechten Winkels.

Buch XIV.

XIV.1.

Die senkrechte Strecke von der Seite eines Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, ist die Hälfte der Strecke aus den Seiten eines Sechsecks und eines Zehnecks zusammen, die demselben Kreis einbeschrieben sind.

Lemma XIV.2.

Das Quadrat über der Sehne unter zwei Seiten eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zusammen mit dem Quadrat über einer Seite des Fünfecks ist gleich dem fünffachen Quadrat über dem Radius des Kreises, dem es einbeschrieben ist.

XIV.2.

Die fünfeckige Seitenfläche eines Dodekaeders und die dreieckige Seitenfläche eines Ikosaeders, die derselben Kugel einbeschrieben sind, haben den gleichen Umkreis.

XIV.3.

Das dreißigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, mit einer Seite des Fünfecks ist gleich der Oberfläche dessen Dodekaeders.

Das dreißigfache Rechteck aus der senkrechten Strecke von der Seite eines gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecks zum Mittelpunkt des Kreises, dem es einbeschrieben ist, mit einer Seite des Dreiecks ist gleich der Oberfläche dessen Ikosaeders.

XIV.4.

Die Oberfläche eines Dodekaeders verhält sich zur Oberfläche eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante des Ikosaeders.

Lemma XIV.4.

Sind zwei Strecken in stetiger Teilung geteilt, dann verhält sich die eine Strecke zu ihrem größeren Teil wie die andere Strecke zu ihrem größeren Teil.

XIV.5.

Die Seite des Quadrats, das dem Quadrat über einer in stetiger Teilung geteilten Strecke zusammen mit dem Quadrat über dessen größeren Teil gleich ist, verhält sich zur Seite des Quadrats, das dem Quadrat über der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über dem kleineren Teil gleich ist, wie die Kante eines Würfel zur Kante eines Ikosaeders.

XIV.6.

Das Volumen eines Dodekaeders verhält sich zum Volumen eines Ikosaeders wie die Kante eines Würfels zur Kante eines Ikosaeders.

Buch XV.

XV.1.

Einem gegebenen Würfel ein Tetraeder einbeschreiben.

XV.2.

Einem gegebenen Tetraeder ein Oktaeder einbeschreiben.

XV.3.

Einem gegebenen Würfel ein Oktaeder einbeschreiben.

XV.4.

Einem gegebenen Oktaeder einen Würfel einbeschreiben.

XV.5.

Einem gegebenen Ikosaeder ein Dodekaeder einbeschreiben.

XV. 6.

Die Anzahl der Kanten und Ecken der fünf Polyeder bestimmen.

XV.7.

Die Neigungen der Seitenflächen an den Kanten der fünf Polyeder bestimmen.